難　塾技 25　格子点

問題

a，b，n を 1 以上の整数とする。原点を O とする座標平面上に 2 直線

$y = ax + n$ …①　　$y = bx$ …②

と点 P(n，0)を通り y 軸に平行な直線 l がある。①と l の交点を Q，②と l の交点を S とし，点(0，n)を R とする。

いま，座標平面のうち，四角形 OPQR の周および内部に含まれる部分を A，三角形 OPS の周および内部に含まれる部分を B とする。次の問いに答えなさい。なお，以下の問題文中の「格子点」とは，座標平面上の点の中で，x 座標も y 座標も整数であるような点のことをいう。

(1) $a = 2$，$n = 4$ のとき，A に含まれる格子点の数を求めなさい。

(2) S と Q が一致するとき，A に含まれているが B には含まれていない格子点の数を n を用いた式で表しなさい。

(3) A に含まれる格子点の数と B に含まれる格子点の数が等しいとき，b を a の式で表しなさい。

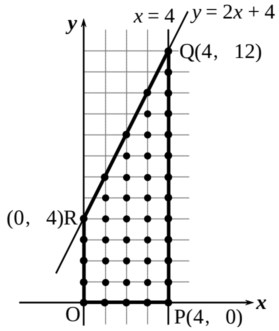
（渋谷幕張高）

解答は次のページ

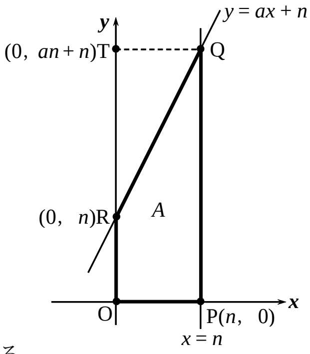
解

(1) $a=2$，$n=4$ より，①：$y=2x+4$，P(4，0)，
l：$x=4$，R(0，4)となる。また，Q の座標は，
$y=2x+4$ に $x=4$ を代入して $y=12$
よって，Q(4，12)と求まる。
「塾技 25（1）」より，座標平面に目盛りを取り，
実際に何個あるかを数え上げる。右の図より，

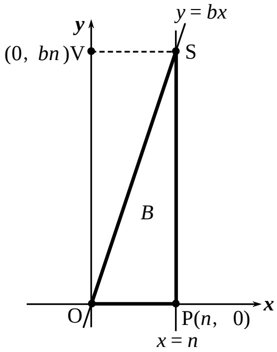
$5+7+9+11+13=$ **45 個** 答



(2) 右の図 1 のように，Q から y 軸に下ろした垂線の足を T，図 2 のように，S から y 軸に下ろした垂線の足を V とする。
A に含まれる格子点の数は，長方形 OPQT の周および内部に含まれる格子点の数から，△TRQ の辺 QR 以外の辺および内部に含まれる格子点の数を引けばよい。ここで，a，n は整数より，辺 QR 上の格子点の数は$(n+1)$個とわかる。



〈図 1〉



〈図 2〉

このことと，「塾技 25（3）」を用いて，

(A に含まれる格子点の数)

$$=(n+1)(an+n+1)-\left\{\frac{(n+1)(an+n-n+1)}{2}-\frac{n+1}{2}\right\}\quad\cdots①$$

一方，B に含まれる格子点の数は，「塾技 25（3）」より，

$$\frac{(n+1)(bn+1)}{2}+\frac{n+1}{2}\quad\cdots②$$

ここで，S と Q が一致することより，$bn=an+n$ を②に代入すると，求める格子点の数は，

$$(n+1)(an+n+1)-\left\{\frac{(n+1)(an+n-n+1)}{2}-\frac{n+1}{2}\right\}-\left\{\frac{(n+1)(an+n+1)}{2}+\frac{n+1}{2}\right\}$$

$n+1=x$
$an+n+1=y$ とおく

$$=xy-\left\{\frac{x(y-n)}{2}-\frac{x}{2}\right\}-\left(\frac{xy}{2}+\frac{x}{2}\right)$$

$$=\frac{2xy-xy+nx+x-xy-x}{2}=\frac{nx}{2}=\boldsymbol{\frac{n(n+1)}{2}}$$ 答

(3) (2) において，①＝②となればよいので，

$$(n+1)(an+n+1)-\left\{\frac{(n+1)(an+n-n+1)}{2}-\frac{n+1}{2}\right\}=\frac{(n+1)(bn+1)}{2}+\frac{n+1}{2}$$

$n+1=x$ とおく

$$x(an+x)-\left\{\frac{x(an+1)}{2}-\frac{x}{2}\right\}=\frac{x(bn+1)}{2}+\frac{x}{2}$$

$$2x(an+x)-x(an+1)+x=x(bn+1)+x$$

$$2anx+2x^2-anx-x+x=bnx+x+x$$

$$bnx=anx+2x^2-2x$$

$x>0$ より，両辺を x で割る

$$bn=an+2x-2$$

$$bn=an+2(n+1)-2$$

$$bn=an+2n$$

$$\boldsymbol{b=a+2}$$ 答