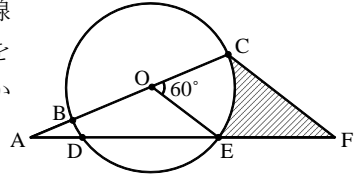


問題

半径が 2cm の円 O がある。円 O の外の点 A から中心 O を通る直線をひき、円 O との交点を B, C とする。また、点 A から中心 O を通らない直線を引き、円 O との交点を D, E とする。さらに点 C から OE に平行な直線をひき、直線 AE との交点を F とする。 $\angle COE = 60^\circ$ 、 $CF = 3\text{cm}$ であるとき、次の各問いに答えなさい。



- (1) AE の長さを求めなさい。 (2) DE の長さを求めなさい。
 (3) 斜線部分の面積を求めなさい。 (東京学芸大附高)

解

(1) $OE \parallel CF$ より、 $\triangle AOE \sim \triangle ACF$ となるので、

$$\begin{aligned} AO : AC &= OE : CF \\ &= 2 : 3 \end{aligned}$$

よって、 $AO : OC = 2 : 1$ とわかる。 $OC = 2$ より、 $AO = 4$
 ここで、E から OC に垂線 EH を下ろすと、 $\triangle OEH$ は、 $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の直角三角形となるので、 $OE = 2$ より、

$$EH = \frac{\sqrt{3}}{2} OE = \sqrt{3}, \quad OH = \frac{1}{2} OE = 1$$

$\triangle AEH$ に三平方の定理を用いて、

$$\begin{aligned} AE &= \sqrt{EH^2 + AH^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (4+1)^2} = 2\sqrt{7} \text{ (cm)} \quad \leftarrow \text{答} \end{aligned}$$

(2) (1) より、 $AB = AO - BO = 4 - 2 = 2$

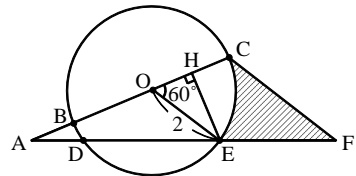
$DE = x$ とおくと、「塾技 66 (図 2)」の方べきの定理より、

$$AB \times AC = AD \times AE$$

$$2 \times (2+4) = (2\sqrt{7} - x) \times 2\sqrt{7}$$

$$12 = 28 - 2\sqrt{7}x$$

$$2\sqrt{7}x = 16 \quad \text{これを解いて、} x = \frac{8\sqrt{7}}{7} \text{ (cm)} \quad \leftarrow \text{答}$$



(3) 斜線部分の面積 = 台形 OEFC - おうぎ形 OEC

ここで台形の高さは、C から OE に垂線 CI を下ろすと、 $\triangle OCI$ は $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の直角三角形となるので、

$$CI = \frac{\sqrt{3}}{2} CO = \sqrt{3}$$

以上より、求める面積は、

$$\begin{aligned} &(2+3) \times \sqrt{3} \times \frac{1}{2} - 2 \times 2 \times \pi \times \frac{60}{360} \\ &= \left(\frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{2}{3}\pi \right) \text{ cm}^2 \quad \leftarrow \text{答} \end{aligned}$$

