

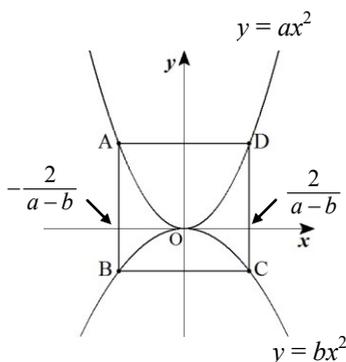
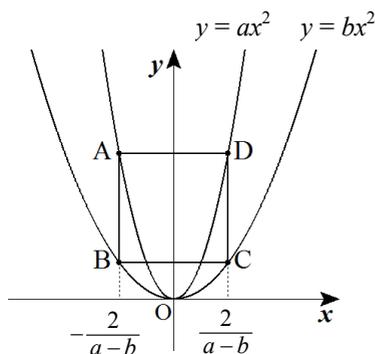
瞬解 14 2つの放物線と正方形

瞬解 14

下の図で、四角形 ABCD が正方形となるとき、どちらも、

$$\text{点Cの}x\text{座標} = \text{点Dの}x\text{座標} = \frac{2}{a-b} \quad (a > b)$$

が成り立つ。



- ☐ 上の左側のグラフで、 $a = 1, b = \frac{1}{4}$ の場合を考えてみましょう。いま、点 C の x 座標を p とすると、C の座標は $(p, \frac{1}{4}p^2)$ 、D の座標は (p, p^2) とおけますね。ではこのとき、AD および CD の長さを p を用いて表すとどうなりますか？

😊 点 A の x 座標は $-p$ だから、 $AD = p - (-p) = 2p$ 、 $CD = p^2 - \frac{1}{4}p^2 = \frac{3}{4}p^2$

- ☐ 正解！それでは次に、四角形 ABCD が正方形となるとき p の値を求めてみましょう。ある 2 次方程式を解くことにはなりますが、わかりますか？

😊 正方形は縦と横の長さが等しいので、 $\frac{3}{4}p^2 = 2p$ が成り立つと思います。

- ☐ その通りです。両辺を 4 倍して、 $3p^2 = 8p$ より、 $3p^2 - 8p = 0$ $p(3p - 8) = 0$
 $p \neq 0$ より、 $p = \frac{8}{3}$ とわかります。

これを瞬解で求めると、 $p = 2 \div \left(1 - \frac{1}{4}\right) = 2 \div \frac{3}{4} = 2 \times \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$ と正に一瞬です！

👁️ すごい！ほんとに一瞬だ。

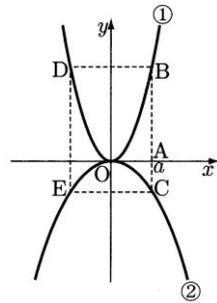
📖 ただし、公立高校では、このタイプの問題は特に考え方をかかせることが多いですから、瞬解が成り立つ理由をしっかりと身につけましょう。

瞬解 14 が成り立つ理由

左ページの図で点 C の x 座標を $p(p > 0)$ とすると、 $C(p, bp^2)$ 、 $D(p, ap^2)$ となる。このとき、 $AD = p - (-p) = 2p$ 、 $CD = ap^2 - bp^2$ となり、四角形 ABCD が正方形となることより、 $CD = AD$ が成り立つので、 $ap^2 - bp^2 = 2p$ となる。両辺を p で割って、 $ap - bp = 2$ $p(a - b) = 2$ となるので、 $p = \frac{2}{a - b}$ が成り立つ。

瞬解チェック問題

問題 右の図のように、関数 $y = x^2$ のグラフ…①と関数 $y = -\frac{1}{3}x^2$ のグラフ…②がある。 x 座標が a である点 A を x 軸上にとり、点 A を通り、 x 軸に垂直な直線と①、②との交点をそれぞれ B、C とする。また、点 B、C と y 軸について対称な点をそれぞれ D、E とする。四角形 BDEC が正方形になるとき、 a の値を求めなさい。ただし、 $a > 0$ とする。



解 瞬解 14 より、 $a = 2 \div \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{3} \right) \right\} = 2 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$

入試問題にチャレンジ！

問題 関数 $y = 2x^2$ 、関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフ上に、4 点 A、B、C、D を右図のようにとり、四角形 ABCD が正方形となるようにする。ただし、AB は x 軸に平行である。座標軸の単位の長さを 1cm とするとき、正方形 ABCD の面積は、 cm^2 である。(筑波大附高)

