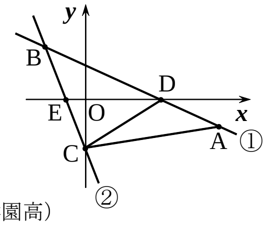
塾技 18　座標平面上の三角形（2）

問題（難易度 C）

右の図において，直線①の式は $y=-\frac{1}{3}x+2$，直線②の式は $y=-2x-3$ である。点 A を直線①上の点，点 B を直線①と②の交点，点 C は直線②と y 軸の交点，点 D，E をそれぞれ直線①，②と x 軸との交点とする。三角形 DEC の面積が三角形 ABC の $\frac{1}{3}$ であるとき，直線 CA の式を求めよ。（西大和学園高）



解

まずは①と②の交点 B を求める。

$$\begin{cases} y=-\frac{1}{3}x+2 \\ y=-2x-3 \end{cases} \xrightarrow{\text{代入法}} \quad -\frac{1}{3}x+2=-2x-3$$

$$-x+6=-6x-9$$

$$5x=-15 \qquad x=-3 \text{ より，B}(-3,\ 3)$$

次に点 D の座標を求める。①の式に $y=0$ を代入して，

$$0=-\frac{1}{3}x+2 \qquad x=6 \text{ より，D}(6,\ 0)$$

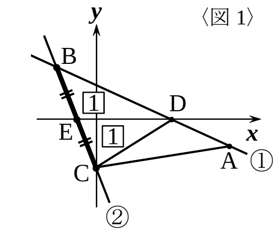
一方，点 C は②の y 切片-3 より，C$(0,-3)$。点 E は，②の式に $y=0$ を代入して，

$$0=-2x-3 \qquad x=-\frac{3}{2} \text{ より，E}\left(-\frac{3}{2},\ 0\right)$$

点 E は，C$(0,-3)$と B$(-3,\ 3)$との中点となるので，

「塾技 18（1）」より，

$$\triangle\text{DBE} : \triangle\text{DCE} = \text{BE} : \text{CE} = 1 : 1 \text{（図 1）}$$



条件より，$\triangle\text{DEC}=\frac{1}{3}\triangle\text{ABC}$となるので，「塾技 18（1）」より，

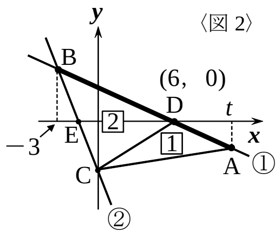
$$\triangle\text{CBD} : \triangle\text{CAD} = \text{BD} : \text{AD} = 2 : 1 \text{（図 2）}$$

となればよい。A の x 座標を t とすると，

$$\text{BD} : \text{DA} = \{6-(-3)\} : (t-6) = 2 : 1$$

$$9 : (t-6) = 2 : 1$$

$$t=\frac{21}{2}$$



点 A の y 座標は，①の式に $x=\frac{21}{2}$を代入し，$y=-\frac{3}{2}$

以上より，求める直線 CA は，$y=ax-3$ に A$\left(\frac{21}{2},-\frac{3}{2}\right)$を代入して，

$$-\frac{3}{2}=\frac{21}{2}a-3 \qquad -3=21a-6 \qquad a=\frac{1}{7}$$

答 $\boldsymbol{y=\frac{1}{7}x-3}$