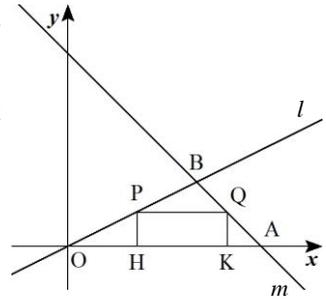


塾技 24 座標の求め方

問題 (難易度 A)

右の図のように、原点 O を通る直線 l と、点 $A(12, 0)$ を通る直線 m がある。直線 l と直線 m は、点 $B(8, 4)$ で交わっている。また、線分 OB 上に点 P 、線分 AB 上に点 Q をとり、2点 P, Q から x 軸に引いた垂線と x 軸との交点をそれぞれ H, K とする。四角形 $PHKQ$ が長方形のとき、次の (1) ~ (3) の各問いに答えなさい。



- (1) 直線 l の式を求めなさい。
- (2) 直線 m の式を求めなさい。
- (3) 点 P の x 座標を a とするとき、次の (ア) ~ (ウ) の各問いに答えなさい。
 - (ア) 点 Q の座標を a を使って表しなさい。
 - (イ) $PH : HK = 1 : 7$ となるとき、 a の値を求めなさい。
 - (ウ) 長方形 $PHKQ$ の面積が 9 となるとき、 a の値をすべて求めなさい。 (佐賀県)

解

- (1) l は原点と点 B を通る直線なので、 $y = ax$ に $B(8, 4)$ を代入して、

$$4 = 8a \rightarrow a = \frac{1}{2} \quad \text{よって、} y = \frac{1}{2}x \quad \text{答}$$

- (2) m は、2点 $A(12, 0)$ 、 $B(8, 4)$ を通る直線なので、2点をそれぞれ $y = ax + b$ に代入。

$$\begin{cases} 0 = 12a + b \\ 4 = 8a + b \end{cases} \xrightarrow{\text{加減法}} a = -1, b = 12 \quad \text{よって、} y = -x + 12 \quad \text{答}$$

- (3) (ア) 点 P は直線 $l: y = \frac{1}{2}x$ 上の点で、 x 座標が a より、 $P(a, \frac{1}{2}a)$ と表せる。

一方、点 Q は直線 $m: y = -x + 12$ 上の点で、 y 座標は点 P の y 座標と等しく $\frac{1}{2}a$ となる。よって、点 Q の x 座標は、 m に $y = \frac{1}{2}a$ を代入して、

$$\frac{1}{2}a = -x + 12 \rightarrow x = -\frac{1}{2}a + 12 \quad \text{よって、} Q(-\frac{1}{2}a + 12, \frac{1}{2}a) \quad \text{答}$$

- (イ) $P(a, \frac{1}{2}a)$ 、 $Q(-\frac{1}{2}a + 12, \frac{1}{2}a)$ より、

$$PH = \frac{1}{2}a, \quad HK = (-\frac{1}{2}a + 12) - a = -\frac{3}{2}a + 12$$

条件より、 $PH : HK = 1 : 7$ となるので、

$$\frac{1}{2}a : (-\frac{3}{2}a + 12) = 1 : 7$$

$$\text{両辺を 2 倍} \quad \left(\frac{1}{2}a \times 7 = 1 \times (-\frac{3}{2}a + 12) \right)$$

$$7a = -3a + 24$$

$$a = \frac{12}{5} \quad \text{答}$$

- (ウ) 長方形 $PHKQ = PH \times HK = 9$ より、

$$\frac{1}{2}a \times (-\frac{3}{2}a + 12) = 9$$

$$-\frac{3}{4}a^2 + 6a = 9$$

$$-3a^2 + 24a = 36$$

$$-a^2 + 8a - 12 = 0$$

$$a^2 - 8a + 12 = 0$$

$$(a - 2)(a - 6) = 0 \quad \text{この解き方は中3で学習}$$

$$a = 2, 6 \quad \text{答}$$