

塾技 41 平方根と平方数

問題 1 (難易度 B)

$\sqrt{84-3n}$ が自然数となるような、自然数 n の値をすべて求めなさい。 (神奈川県立湘南高)

問題 2 (難易度 C)

1 から 6 までの目の出る大小 1 つずつのさいころを同時に 1 回投げる。大きいさいころの出た目の数を a 、小さいさいころの出た目の数を b とし、 a と b の積を c とするとき、 $\sqrt{\frac{216}{c}}$ の値が整数になる確率を求めよ。ただし、大小 2 つのさいころはともに、1 から 6 までのどの目が出ることも同様に確からしいものとする。 (都立日比谷高)

解 1

「塾技 41」の手順に従って解く。

$$\sqrt{84-3n} = \sqrt{3(28-n)}$$

$28-n = 3k^2$ (k は自然数) とおくと、 $n = 28-3k^2$ と表すことができる。

$$k=1 \text{ のとき, } n = 28-3 \times 1^2 = 25$$

$$k=2 \text{ のとき, } n = 28-3 \times 2^2 = 16$$

$$k=3 \text{ のとき, } n = 28-3 \times 3^2 = 1$$

$$k=4 \text{ のとき, } n = 28-3 \times 4^2 = -20 \text{ (} n \text{ は自然数を満たさない)}$$

答 $n = 1, 16, 25$

解 2

「塾技 41」の手順に従って解く。

$$\sqrt{\frac{216}{c}} = 6\sqrt{\frac{6}{c}} \quad \dots \textcircled{1}$$

$c = 6k^2$ (k は自然数) とおける。このとき①は、

$$\textcircled{1} = 6\sqrt{\frac{6}{c}} = 6\sqrt{\frac{6}{6k^2}} = 6\sqrt{\frac{1}{k^2}} = 6\sqrt{\left(\frac{1}{k}\right)^2} = 6 \times \frac{1}{k}$$

$6 \times \frac{1}{k}$ が整数となるには、 k は 6 の約数 1, 2, 3, 6 となればよい。

$c = 6k^2$ より、 $k = 1, 2, 3, 6$ のときの c の値はそれぞれ、

$$c = 6, 24, 54, 216 \quad \dots \textcircled{2}$$

ここで、「塾技 32」より、 6×6 の表を書いて考える。

表より、②を満たす c の値は 6 通り。よって、

$$\text{確率} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \quad \text{答}$$

		(a)					
		1	2	3	4	5	6
(b)	1	1	2	3	4	5	⑥
	2	2	4	⑥	8	10	12
	3	3	⑥	9	12	15	18
	4	4	8	12	16	20	②4
	5	5	10	15	20	25	30
	6	⑥	12	18	②4	30	36