

塾技 45 式の値①

問題 1 (難易度 A)

$x=1+\sqrt{3}$, $y=1-\sqrt{3}$ のとき, x^2-y^2 の値を求めなさい。 (神奈川県)

問題 2 (難易度 A)

$a=3\sqrt{3}+\sqrt{2}$, $b=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ のとき, $a^2-2ab-3b^2$ の値を求めなさい。 (神奈川県立湘南高)

問題 3 (難易度 A~B)

$a+b=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$, $ab=\frac{\sqrt{3}}{4}$ のとき, a^2+b^2 の値を求めなさい。 (東邦大附東邦高)

問題 4 (難易度 A~B)

$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $y=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ のとき, x^2+y^2+5xy の値を求めなさい。 (神奈川県立横浜翠嵐高)

解 1

「塾技 45(2)」より, まずは求値式を因数分解してから代入する。

$$\begin{aligned} x^2-y^2 &= (x+y)(x-y) \\ &= \{(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})\}\{(1+\sqrt{3})-(1-\sqrt{3})\} \\ &= 2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \quad \langle \text{答} \rangle \end{aligned}$$

解 2

「塾技 45(2)」より, まずは求値式を因数分解してから代入する。

$$\begin{aligned} a^2-2ab-3b^2 &= (a+b)(a-3b) \\ &= \{(3\sqrt{3}+\sqrt{2})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})\}\{3\sqrt{3}+\sqrt{2}-3(\sqrt{3}-\sqrt{2})\} \\ &= 4\sqrt{3} \times 4\sqrt{2} = 16\sqrt{6} \quad \langle \text{答} \rangle \end{aligned}$$

解 3

求値式は対称式(塾技 45 例題補足)なので, 「塾技 45(3)」より,

$$a^2+b^2 = \frac{(a+b)^2-2ab}{a^2+2ab+b^2} \quad \text{と式変形できる。}$$

$$\text{よって, } a^2+b^2 = \frac{(1+\sqrt{3})^2}{2} - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{2+\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \quad \langle \text{答} \rangle$$

解 4

求値式は対称式なので, 「塾技 45(3)」より,

$$\begin{aligned} x^2+y^2+5xy &= \frac{(x+y)^2+3xy}{x^2+2xy+y^2} \\ &= \frac{(1+\sqrt{5})^2}{2} + 3 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = 1^2 + 3 \left(\frac{1-5}{4} \right) = 1-3 = -2 \quad \langle \text{答} \rangle \end{aligned}$$