

塾技 46 式の値②

問題 1 (難易度 A)

$x = \sqrt{3} - 1$ のとき、 $x^2 + 2x + 3$ の値を求めなさい。

(大阪教育大附高池田)

問題 2 (難易度 A)

$x = 4 + \sqrt{2011}$ のとき、 $x^2 - 8x + 7$ の値を求めなさい。

(大阪府)

問題 3 (難易度 B)

2 次方程式 $x^2 - 2x - 1 = 0$ の解の 1 つを a とするとき、 a^4 を a の 1 次式で表しなさい。

(法政大二高)

解 1

「塾技 46 (1)」の次数下げを利用する。

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{3} - 1 && \left. \begin{array}{l} -1 \text{ を左辺に移項する} \\ x + 1 = \sqrt{3} \end{array} \right\} \\ (x+1)^2 &= (\sqrt{3})^2 && \left. \begin{array}{l} \text{両辺を 2 乗する} \\ x^2 + 2x + 1 = 3 \end{array} \right\} \\ x^2 + 2x + 1 &= 3 \\ x^2 + 2x &= 2 \quad \cdots \text{①} \end{aligned}$$

①を $x^2 + 2x + 3$ に代入して、

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 3 &= 2 + 3 \\ &= 5 \quad \text{◀ 答} \end{aligned}$$

解 2

「塾技 46 (1)」の次数下げを利用する。

$$\begin{aligned} x &= 4 + \sqrt{2011} && \left. \begin{array}{l} 4 \text{ を左辺に移項する} \\ x - 4 = \sqrt{2011} \end{array} \right\} \\ (x-4)^2 &= (\sqrt{2011})^2 && \left. \begin{array}{l} \text{両辺を 2 乗する} \\ x^2 - 8x + 16 = 2011 \end{array} \right\} \\ x^2 - 8x + 16 &= 2011 \\ x^2 - 8x &= 1995 \quad \cdots \text{①} \end{aligned}$$

①を $x^2 - 8x + 7$ に代入して、

$$\begin{aligned} x^2 - 8x + 7 &= 1995 + 7 \\ &= 2002 \quad \text{◀ 答} \end{aligned}$$

解 3

a は与えられた 2 次方程式の解の 1 つなので、「塾技 46 (2)」より、 $x = a$ を与えられた 2 次方程式に代入して、

$$\begin{aligned} a^2 - 2a - 1 &= 0 \\ a^2 &= 2a + 1 \quad \cdots \text{①} \end{aligned}$$

ここで、 $a^4 = (a^2)^2$ より、①を代入して、

$$\begin{aligned} a^4 &= (2a + 1)^2 \\ &= 4a^2 + 4a + 1 \quad \cdots \text{②} \end{aligned}$$

②にさらに①を代入して、

$$\begin{aligned} \text{②} &= 4(2a + 1) + 4a + 1 \\ &= 8a + 4 + 4a + 1 \\ &= 12a + 5 \end{aligned}$$

よって、 $a^4 = 12a + 5$ ◀ 答