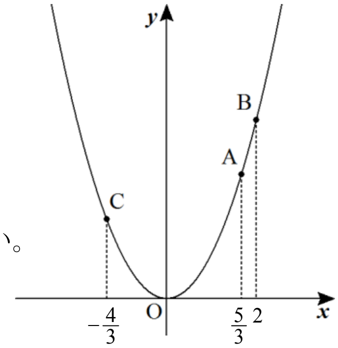
塾技 49　放物線と直線（1）

問題（難易度 B）

関数 $y = ax^2$…①のグラフは点 $(-2,\ 3)$ を通っている。①のグラフ上に 3 点 A，B，C があり，その x 座標はそれぞれ $\frac{5}{3}$，2，$-\frac{4}{3}$ である。



（1）定数 a の値を求めなさい。

（2）点 A を通り，傾きが $-\frac{1}{4}$ である直線 l の式を求めなさい。

（3）2 点 B，C を通る直線 m の式を求めなさい。

（4）（2），（3）で求めた直線 l，m の交点を K とするとき，△ABK の面積を求めなさい。　　（大阪教育大附高池田校舎）

解

（1）$y = ax^2$ に $(-2,\ 3)$ を代入して，

$3 = 4a \qquad a = \frac{3}{4}$　　　　答 $\boldsymbol{a = \frac{3}{4}}$

（2）点 A の y 座標 $= \frac{3}{4} \times \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{12}$ より，$y = -\frac{1}{4}x + b$ に $\mathrm{A}\left(\frac{5}{3},\ \frac{25}{12}\right)$ を代入して，

$\frac{25}{12} = -\frac{1}{4} \times \frac{5}{3} + b \qquad b = \frac{25}{12} + \frac{5}{12} = \frac{30}{12} = \frac{5}{2}$　　　　答 $\boldsymbol{y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{2}}$

（3）「塾技 49」より，直線 m の傾き $= \frac{3}{4}\left(2 - \frac{4}{3}\right) = \frac{1}{2}$，$y$ 切片 $= -\frac{3}{4} \times 2 \times \left(-\frac{4}{3}\right) = 2$ とわかる。

答 $\boldsymbol{y = \frac{1}{2}x + 2}$

（4）交点 K の座標は，直線 l と直線 m の式を連立して，

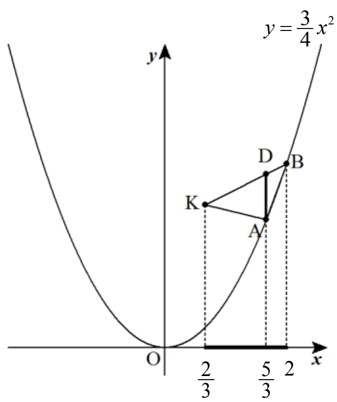
$$\begin{cases} y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{2} \\ y = \frac{1}{2}x + 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{代入法}} -\frac{1}{4}x + \frac{5}{2} = \frac{1}{2}x + 2 \ \rightarrow\ x = \frac{2}{3},\ y = \frac{7}{3} \ \rightarrow\ \mathrm{K}\left(\frac{2}{3},\ \frac{7}{3}\right)$$

「塾技 17（2）」より，△ABK を頂点 A を通る y 軸に平行な直線で 2 つの三角形に分けて考える。

右の図のように，A を通り y 軸に平行な直線と，直線 BK との交点を D とする。

直線 BK は，$y = ax + b$ に $\mathrm{B}(2,\ 3)$，$\mathrm{K}\left(\frac{2}{3},\ \frac{7}{3}\right)$ を代入して，$a = \frac{1}{2}$，$b = 2$ より，$y = \frac{1}{2}x + 2$ とわかるので，

D の y 座標 $= \frac{1}{2} \times \frac{5}{3} + 2 = \frac{17}{6}$ とわかる。



以上より，求める△ABK の面積は，

$\triangle \mathrm{ABK} = \left(\frac{17}{6} - \frac{25}{12}\right) \times \left(2 - \frac{2}{3}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$　　　　答 $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$