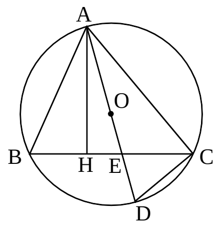
塾技 69　外接円

問題（難易度 B～C）

右の図のように，$AB=\sqrt{5}$cm，$BC=3$cm，$CA=2\sqrt{2}$cm の△ABC の外接円の中心を O とし，直線 AO と外接円との交点のうち，A と異なるものを D とする。また，A から辺 BC へひいた垂線と BC との交点を H とし，AD と BC の交点を E とする。



（1）△ABH∽△ADC を証明しなさい。

（2）2 つの直角三角形△ABH と△ACH に目をつけて，BH の長さを求めなさい。

（3）外接円の半径を求めなさい。

（4）BE：EC を求めなさい。　　（長野県）

解

（1）［証明］

△ABH と△ADC において，

∠AHB = 90°（仮定）…①

∠ACD = 90°（$\overset{\frown}{AD}$ に対する円周角）…②

①，②より，∠AHB＝∠ACD …③

∠ABH＝∠ADC（$\overset{\frown}{AC}$ に対する円周角）…④

③,④より, 2 組の角がそれぞれ等しいので,

△ABH∽△ADC である。（証明終わり）

（2）「塾技 73」の手順に従って求めればよい。

AH = h，BH = x，CH = 3－x とおく。

△ABH に三平方の定理を用いて，

$h^2=(\sqrt{5})^2-x^2$　…①

同様に，△ACH に三平方の定理を用いて，

$h^2=(2\sqrt{2})^2-(3-x)^2$　…②

① = ②より，

$(\sqrt{5})^2-x^2=(2\sqrt{2})^2-(3-x)^2$

$5-x^2=8-(9-6x+x^2)$

$-6x=-6$

$x=\mathbf{1(cm)}$　答

（3）（2）より，$h^2=(\sqrt{5})^2-1^2=4$　→　AH = 2

求める外接円の半径を R とすると，

（1）より，△ABH∽△ADC なので，

AB：AD = AH：AC

$\sqrt{5}:2R=2:2\sqrt{2}$

$4R=2\sqrt{10}$

$R=\mathbf{\dfrac{\sqrt{10}}{2}}$　答

（4）AH = CH = 2 より，△AHC は直角二等辺三角形となる。一方，∠ACD = 90°より，∠ACE =∠DCE = 45°。よって，CE は∠ACD の二等分線となり，「塾技 60 **1**」より，

AE：DE = CA：CD

ここで，△ACD に三平方の定理を用いて，

$CD=\sqrt{(\sqrt{10})^2-(2\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}$

よって，$AE:DE=2\sqrt{2}:\sqrt{2}=2:1$ …①

一方，△ABE∽△CDE より，

$AE:CE=AB:CD=\sqrt{5}:\sqrt{2}$ …②

①より，$AE=\dfrac{2}{2+1}AD=\dfrac{2\sqrt{10}}{3}$

よって，②より，$CE=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}AE=\dfrac{4}{3}$

以上より，$BE:EC=(3-\dfrac{4}{3}):\dfrac{4}{3}=\mathbf{5:4}$　答