塾技 76　空間内の線分の長さ

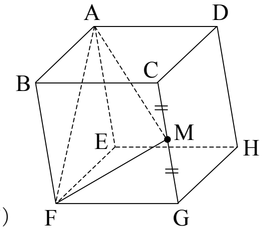
問題（難易度 B）

右の図のように，1 辺の長さが $2\sqrt{3}$ の立方体があり，辺 CG の中点を M とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 線分 AF，AM の長さをそれぞれ求めよ。

(2) $\triangle$AFM の面積を求めよ。

(3) 点 B から $\triangle$AFM に下ろした垂線の長さを求めよ。（日本大第二高）



解

(1) 線分 AF の長さは，$\triangle$ABF が $1:1:\sqrt{2}$ の直角三角形となることより，

$$AF = AB\times\sqrt{2} = 2\sqrt{3}\times\sqrt{2} = 2\sqrt{6}$$

一方，線分 AM の長さは，「塾技 76 (2)」より，3 辺の長さがそれぞれ $2\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ の直方体の対角線の長さと考えることができるので，

$$AM = \sqrt{(2\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{12+12+3} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

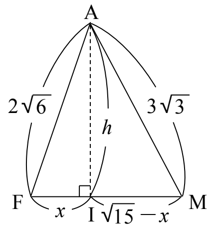
答　**$AF = 2\sqrt{6}$，$AM = 3\sqrt{3}$**

(2) $FM = \sqrt{FG^2+MG^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{15}$ となるので，$\triangle$AFM の 3 辺の長さは全てわかる。

「塾技 73」の手順に従って高さを求めて面積を求める。

右の図のように，A から FM に垂線 AI を下ろし，

$AI = h$，$FI = x$，$IM = \sqrt{15}-x$ とおく。$\triangle$AFI に三平方の定理を用いて，



$$h^2 = (2\sqrt{6})^2 - x^2 \quad \cdots①$$

同様に，$\triangle$AMI に三平方の定理を用いて，

$$h^2 = (3\sqrt{3})^2 - (\sqrt{15}-x)^2 \quad \cdots②$$

①＝②より，

$$(2\sqrt{6})^2 - x^2 = (3\sqrt{3})^2 - (\sqrt{15}-x)^2$$
$$24 - x^2 = 27 - (15 - 2\sqrt{15}x + x^2)$$
$$24 - x^2 = 27 - 15 + 2\sqrt{15}x - x^2$$
$$-2\sqrt{15}x = -12$$
$$x = \frac{6}{\sqrt{15}} = \frac{6\sqrt{15}}{15} = \frac{2\sqrt{15}}{5}$$

①に代入して，$h^2 = (2\sqrt{6})^2 - \left(\frac{2\sqrt{15}}{5}\right)^2 = 24 - \frac{60}{25} = \frac{540}{25}$ より，$h = \frac{6\sqrt{15}}{5}$

よって，$\triangle AFM = \sqrt{15}\times\frac{6\sqrt{15}}{5}\times\frac{1}{2} = \mathbf{9}$　答

(3) 求める垂線の長さを y とする。三角錐 ABFM の体積を，底面を$\triangle$AFM，高さを y と考えた三角錐 B-AFM と，底面を$\triangle$ABF，高さを $2\sqrt{3}$ と考えた三角錐 M-ABF の 2 通りで表し(塾技 77 参照)，

$$\underbrace{9\times y\times\frac{1}{3}}_{\text{三角錐 B-AFM}} = \underbrace{2\sqrt{3}\times2\sqrt{3}\times\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times\frac{1}{3}}_{\text{三角錐 M-ABF}} \qquad 9y = 12\sqrt{3} \qquad y = \frac{\mathbf{4\sqrt{3}}}{\mathbf{3}}$$

答