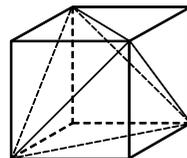


塾技 82 正多面体 (3)

問題 (難易度 B~C)

次の各問いに答えなさい。

- (1) 正四面体は、図のように正六面体（立方体）の中につくることができます。この図を用いて 1 辺の長さが 1 の正四面体の体積を求めなさい。
- (2) (1) と同じように、正六面体の中に正八面体をつくり、1 辺の長さが 1 の正八面体の体積とそのときの正六面体の体積をそれぞれ求めなさい。



(お茶の水女子大附高)

解

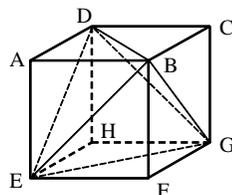
- (1) 立方体の各頂点を右の図のように決める。

$\triangle ABE$ は、 $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ の直角三角形で、 $BE = 1$ より、

$$AB = AE = \frac{1}{\sqrt{2}} BE = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

求める正四面体の体積は、1 辺 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ の立方体からカドにできる合同な 4 つの三角錐を引けばよいので、

$$\begin{aligned} \text{(正四面体の体積)} &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{3} \times 4 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{12} \quad \text{◀答} \end{aligned}$$



- (2) 「塾技 82」より、正四面体の各辺の中点を結ぶと、

立方体の中に正八面体をつくることができる。

できた正八面体の各頂点を図 1 のように決める。

図 1 を真上から見た図 (図 2) を考えると、 $QR = 1$ より、

$$OR = OQ = \frac{1}{\sqrt{2}} QR = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

よって、立方体の 1 辺は $\frac{\sqrt{2}}{2} \times 2 = \sqrt{2}$ とわかる。

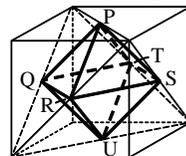
正八面体の体積は、正四角錐 $P-QRST$ の体積を 2 倍すればよい。

一方、正四角錐の高さは立方体の 1 辺の $\frac{1}{2}$ と等しい。以上より、

$$\text{(正八面体の体積)} = 1 \times 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{3} \times 2 = \frac{\sqrt{2}}{3} \quad \text{◀答}$$

$$\text{(正六面体の体積)} = (\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2} \quad \text{◀答}$$

◀図 1



◀図 2

