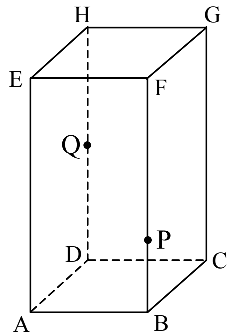
塾技 84　立体の切断（2）

問題　（難易度 C）

右図のように，1 辺の長さが 5cm の正方形を底面とし，高さが 10cm の直方体 ABCD－EFGH がある。点 P を BP ＝ 3cm となるように辺 BF 上に，点 Q を DQ＝5cm となるように辺 DH 上にそれぞれとる。3 点 A，P，Q を通る平面と辺 CG との交点を R とする。このとき，次の問いに答えよ。



（1）線分 CR の長さを求めよ。

（2）面 APRQ で直方体 ABCD－EFGH を 2 つに切断するとき，頂点 C を含む立体の体積を求めよ。

（3）四角形 APRQ の面積を求めよ。

（4）頂点 C から面 APRQ にひいた垂線の長さを求めよ。

（青雲高）

解

（1）「塾技 84 1」（2）より，$0+CR=BP+DQ$ が成り立つので，

$$CR=BP+DQ=3+5=8\ (cm)$$

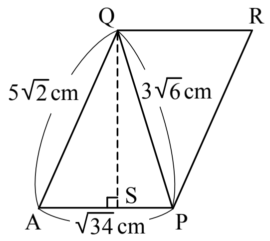
答 **8cm**

（2）「塾技 84 1」（3）より，求める体積は，

$$底面積\times\frac{0+BP+CR+DQ}{4}=5\times5\times\frac{3+5+8}{4}=100\ (cm^3)$$

答 **100cm³**

(3)「塾技 84 1」(1) より，四角形 APRQ は平行四辺形とわかる。



右の図で，$AP=\sqrt{AB^2+BP^2}=\sqrt{34}$ (cm)

$$QA=\sqrt{AD^2+DQ^2}=5\sqrt{2}\ (\text{cm})$$

また，QP の長さは，「塾技 76」(2) より，3 辺の長さがそれぞれ 5cm，5cm，5−3 = 2 (cm) の直方体の対角線の長さと等しくなるので，

$$QP=\sqrt{5^2+5^2+2^2}=3\sqrt{6}\ (\text{cm})$$

ここで，Q から AP に下ろした垂線の足を S とし，「塾技 73」の 3 辺既知の三角形の高さの求め方にしたがって QS を求める。

$AS=x$cm，$QS=h$cm，$SP=(\sqrt{34}-x)$cm とおく。

△QAS に三平方の定理を用いて，

$$h^2=(5\sqrt{2})^2-x^2 \quad \cdots ①$$

同様に，△QPS に三平方の定理を用いて，

$$h^2=(3\sqrt{6})^2-(\sqrt{34}-x)^2 \quad \cdots ②$$

① = ②より，

$$(5\sqrt{2})^2-x^2=(3\sqrt{6})^2-(\sqrt{34}-x)^2$$

$$50-x^2=54-34+2\sqrt{34}x-x^2$$

$$2\sqrt{34}x=30$$

$$x=\frac{15}{\sqrt{34}}(\text{cm})$$

①に代入して，

$$h^2=(5\sqrt{2})^2-\left(\frac{15}{\sqrt{34}}\right)^2=50-\frac{225}{34}=\frac{1475}{34} \qquad h=\frac{\sqrt{1475}}{\sqrt{34}}=\frac{5\sqrt{59}}{\sqrt{34}}$$

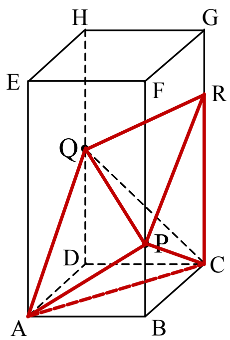
よって，求める四角形 APRQ の面積は，

$$AP\times QS=\sqrt{34}\times\frac{5\sqrt{59}}{\sqrt{34}}=5\sqrt{59}(\text{cm}^2)$$

答 **$5\sqrt{59}\text{cm}^2$**

(4)「塾技 77」の空間内の垂線の長さの求め方を利用すればよい。

四角錐 CAPRQ の体積を 2 通りで表す。



四角錐 CAPRQ =〔(2) の立体〕−〔三角錐 P−ABC〕−〔三角錐 Q−ACD〕

$$=100-5\times5\times\frac{1}{2}\times3\times\frac{1}{3}-5\times5\times\frac{1}{2}\times5\times\frac{1}{3}$$

$$=\frac{200}{3}(\text{cm}^3)$$

ここで，同じ四角錐 CAPRQ を，面 APRQ を底面と考えた，四角錐 C−APRQ と考え，求める垂線の長さを h として体積について立式すると，

$$\text{四角形APRQ}\times h\times\frac{1}{3}=\frac{200}{3}$$

$$5\sqrt{59}\times h\times\frac{1}{3}=\frac{200}{3}$$

$$5\sqrt{59}h=200$$

$$h=\frac{40}{\sqrt{59}}=\frac{40\sqrt{59}}{59}(\text{cm})$$

答 **$\dfrac{40\sqrt{59}}{59}$cm**