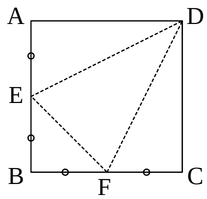
塾技 87　立体の切断（5）

問題（難易度 A～B）

右の図のように，1 辺の長さが 12 の正方形 ABCD の辺 AB の中点を E，辺 BC の中点を F とする。DE，DF，EF で正方形を折り，点 A，B，C が 1 点で重なるようにして三角錐を作る。立体上では，点 A，B，C が重なった点を O とする。このとき，次の問いに答えなさい。



（1）三角錐 O−DEF の体積を求めなさい。

（2）三角錐 O−DEF において，頂点 O から三角形 DEF に垂線をひき，三角形 DEF との交点を H とする。このとき，OH の長さを求めよ。

（3）辺 DF 上に点 P をとり，PO + PD + PE + PF の長さが一番小さくなるとき，その長さを求めよ。

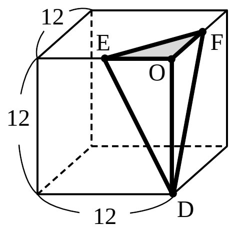
（日本大学二高）

解

（1）「塾技 87」より，求める三角錐 O−DEF は，

右の図の三角錐 D−OEF の体積と等しい。よって，

$$[\text{三角錐O}-\text{DEF}]=6\times6\times\frac{1}{2}\times12\times\frac{1}{3}=\mathbf{72}$$ 答



（2）△DEF の面積は，正方形 ABCD から 3 つの三角形を引いて，

$$\triangle\text{DEF}=12\times12-6\times6\times\frac{1}{2}-6\times12\times\frac{1}{2}\times2=54$$

OH は，（1）の体積を△DEF を底面と考えて方程式を立て，

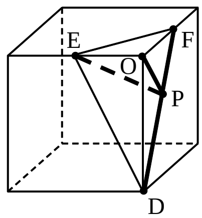
$$\frac{1}{3}\times\triangle\text{DEF}\times\text{OH}=72$$

$$\frac{1}{3}\times54\times\text{OH}=72$$

$$18\times\text{OH}=72$$　よって，$\mathbf{OH=4}$ 答

（3）右の図より，PD + PF = DF（一定）なので，

PO + PE が最短となればよい。

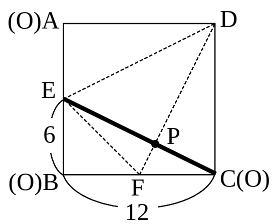


DF は，△ODF に三平方の定理を用いて，

$$\text{DF}=\sqrt{12^2+6^2}=6\sqrt{5}$$

一方，PO + PE は，「塾技 78」より展開図上で直線となればよいので，右の図の△BCE に三平方の定理を用いて，

$$\text{PO}+\text{PE}=\text{EC}=\sqrt{6^2+12^2}=6\sqrt{5}$$



以上より，求める長さは，　$6\sqrt{5}+6\sqrt{5}=\mathbf{12\sqrt{5}}$ 答