塾技 89　内接球（2）

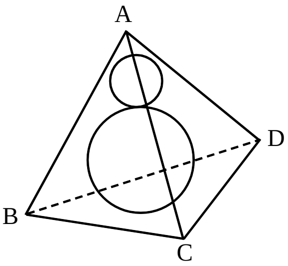
問題（難易度 B）

図のように，1 辺の長さ 4 の正四面体 ABCD の内部に，互いに接している球 P，Q がある。球 P は正四面体の 4 つの面全てに接し，球 Q は 3 つの面△ABC，△ACD，△ABD に接している。

（1）頂点 A から底面である△BCD に垂線を下ろし，底面との交点を H とするとき，AH の長さを求めよ。

（2）球 P の半径 p を求めよ。

（3）球 Q の半径 q を求めよ。　（慶應義塾志木高）



解

（1）「塾技 80（1）」より，　$AH = \dfrac{\sqrt{6}}{3} \times 4 = \boldsymbol{\dfrac{4\sqrt{6}}{3}}$　答

（2）正四面体の表面積は，1 辺 4 の正三角形 ×4 面より，

$$\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2}_{「塾技 72\ \boxed{1}」} \times 4 = 16\sqrt{3}$$

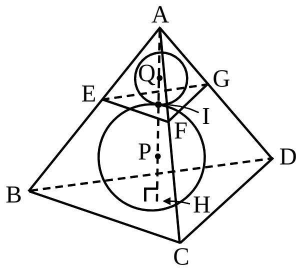
一方，正四面体の体積は，「塾技 80（2）」より，$\dfrac{\sqrt{2}}{12} \times 4^3 = \dfrac{16\sqrt{2}}{3}$

「塾技 89」より，$\dfrac{p}{3} \times 16\sqrt{3} = \dfrac{16\sqrt{2}}{3}$

$$\sqrt{3}p = \sqrt{2}$$

$$p = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{3}}$$　答

（3）球 P の中心を点 P，球 Q の中心を点 Q とすると，
2 点 P，Q は線分 AH 上にある。
右の図のように，球 Q と球 P の接点を I，I を通り底面の△BCD に平行な三角形を△EFG とすると，四面体 AEFG は正四面体となる。正四面体 AEFG と正四面体 ABCD の相似比は，



$$AI : AH = (AH - IH) : AH$$

$$= \left(\frac{4\sqrt{6}}{3} - \frac{\sqrt{6}}{3} \times 2\right) : \frac{4\sqrt{6}}{3}$$

$$= \frac{2\sqrt{6}}{3} : \frac{4\sqrt{6}}{3} = 1 : 2$$

よって，球 Q の半径と球 P の半径も 1：2 となるので，

$$q = \frac{1}{2}p = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{6}}{3} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{6}}$$　答