

塾技 98 整数問題 (2)

問題 1 (難易度 A~B)

n を自然数, p, q ($p > q$) を素数とする。

$$(n+p)(n+q) = 77$$

を満たす n, p, q の値をそれぞれ求めなさい。 (都立青山高)

問題 2 (難易度 A~B)

等式 $x^2 - 9y^2 = 133$ を満たす自然数 x, y の組をすべて求めよ。 (立教新座高)

問題 3 (難易度 B)

$xy - 2x + y - 8 = 0$ を満たす自然数の組 (x, y) は全部で何組ありますか。 (日本大習志野高)

解 1

$77 = 7 \times 11$, $p > q$ より,

$$n+p = 11 \quad \cdots \textcircled{1} \quad n+q = 7 \quad \cdots \textcircled{2}$$

を同時に満たす n, p, q の値を求めればよい。「塾技 98 解法 1」より, $n=1, n=2$ と順に 1 つずつ代入していき, p, q は素数かつ①, ②を満たす値を考えると,

①を満たす n, p の組は, $(n, p) = (4, 7) (6, 5) (8, 3) (9, 2)$

②を満たす n, q の組は, $(n, q) = (2, 5) (4, 3) (5, 2)$

よって, ①, ②を同時に満たす n, p, q の値は, $n=4, p=7, q=3$ ◀ 答

解 2

「塾技 98 解法 2」の因数分解を利用する。

$$x^2 - 9y^2 = 133 \xrightarrow{\text{左辺を因数分解}} (x+3y)(x-3y) = 133$$

x, y は自然数より, $x+3y \geq 4$ かつ $x+3y > x-3y$ が成り立つ。

$133 = 1 \times 133$ 又は $133 = 7 \times 19$ となるので, 積が 133 となるのは,

$$(i) \begin{cases} x+3y=133 \\ x-3y=1 \end{cases} \quad \text{又は} \quad (ii) \begin{cases} x+3y=19 \\ x-3y=7 \end{cases} \quad \text{の 2 通りの場合が考えられる。}$$

(i) より, $x=67, y=22$ (ii) より, $x=13, y=2$ ◀ 答 $(x, y) = (13, 2) (67, 22)$

解 3

「塾技 98 解法 2」の因数分解を利用する。

$$\begin{aligned} xy - 2x + y - 8 = 0 \\ x(y-2) + (y-2) - 6 = 0 & \quad \left. \begin{array}{l} \text{共通因数 } y-2 \text{ を} \\ \text{作り出す} \end{array} \right\} \\ x(y-2) + (y-2) = 6 \\ (y-2)(x+1) = 6 & \quad \left. \begin{array}{l} y-2 \text{ をくくり出す} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

x は自然数より, $x+1 \geq 2$ となることを考え
積が 6 となる $x+1, y-2$ の組を求めると,

$$(x+1, y-2) = (2, 3) (3, 2) (6, 1)$$

よって, $(x, y) = (1, 5) (2, 4) (5, 3)$

◀ 答 3 組