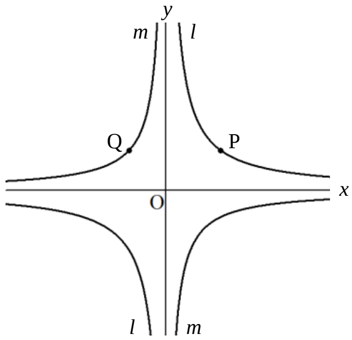
難 塾技 5　反比例の比例定数

問題



右の図で，点 O は原点，曲線 l は $y=\dfrac{18}{x}$ のグラフ，曲線 m は $y=-\dfrac{12}{x}$ のグラフを表している。曲線 l 上にあり，x 座標が正の数である点を P とする。曲線 m 上にあり，x 座標が負の数である点を Q とする。2 点 P，Q の y 座標は等しい。次の各問に答えよ。

〔問 1〕点 P の x 座標と y 座標，点 Q の x 座標と y 座標がすべて整数であるとき，点 P の座標をすべて求めよ。

〔問 2〕曲線 l 上にあり x 座標が負の数である点を R，曲線 m 上にあり x 座標が正の数である点を S とし，点 R の x 座標の値の絶対値が点 P の x 座標の値の絶対値と等しく，点 S の x 座標の値の絶対値が点 Q の x 座標の値の絶対値と等しい場合を考える。次の（1），（2）に答えよ。

（1）点 S の x 座標が 6 のとき，2 点 Q，R を通る直線の式を求めよ。

（2）点 P と点 Q，点 Q と点 R，点 R と点 S，点 S と点 P をそれぞれ結んでできる四角形 PQRS の面積が 60 になることを，点 P の座標を$(a,\ b)$として説明せよ。　　（都立日比谷高）

解

〔問 1〕点 P は，l 上にある x 座標が正の数の格子点（塾技 25）なので，

P(1，18)，(2，9)，(3，6)，(6，3)，(9，2)，(18，1)

一方，点 Q は，m 上にある x 座標が負の数の格子点なので，

Q(−1，12)，(−2，6)，(−3，4)，(−4，3)，(−6，2)，(−12，1)

P，Q の y 座標は等しいことより，**P(3，6)，(6，3)，(9，2)，(18，1)** 答

〔問 2〕（1）S(6，−2)より，Q(−6，2)，P(9，2)，R(−9，−2)となる。

答 $\boldsymbol{y=\dfrac{4}{3}x+10}$

（2）2 点 P，R および Q，S は，それぞれ原点に関して対称なので，四角形 PQRS において，OP = OR，OQ = OS が成り立ち，対角線がそれぞれの中点で交わることより，四角形 PQRS は平行四辺形である。

ここで，点 P$(a,\ b)$とすると，Q$\left(-\dfrac{12}{b},\ b\right)$，S$\left(\dfrac{12}{b},-b\right)$，R$(-a,-b)$とそれぞれ表すことができる。四角形 PQRS の面積を a，b を用いて表すと，

$$\text{四角形 PQRS}=\left\{\frac{12}{b}-(-a)\right\}\times\{b-(-b)\}=\left(\frac{12}{b}+a\right)\times 2b=24+2ab$$

$l:y=\dfrac{18}{x}$ より，$xy=18$ に$(a,\ b)$を代入すると，$ab=18$ とわかるので（塾技 5 (2)），

四角形 PQRS = 24 + 2 × 18 = 24 + 36 = 60 となる。