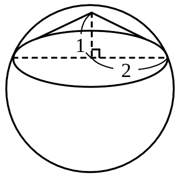
# 難 塾技 10　球

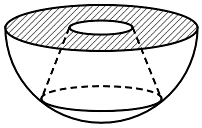
**問題1**

右の図のように，高さが 1，底面の半径が 2 の円すいの頂点と底面の周が，球に内接している。この球の体積を求めよ。　（早稲田本庄高）




**問題2**

半径が 6cm の半球形の容器が, 水が満ちた状態で地面に水平に置かれている。この中に底面の半径が 3cm，上面の半径が 1cm の円すい台を右の図のように水平に入れたところ，水があふれ，ちょうどその水面と円すい台の上面の高さが一致した。次の問いに答えよ。



（1）容器に入っている水の量を求めよ。

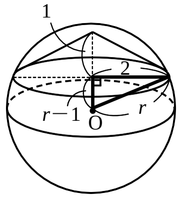
（2）容器から一定量の水を抜いたところ，円すい台のうち，水面から出ている部分と水につかっている部分が相似になった。このとき水面から出ている円すい台の部分の体積を求めよ。

（青山学院高）

---

**解1**

球の中心を O とし，求める球の半径を $r$ とする。右の図の太線の直角三角形に三平方の定理を用いて，




$$r^2=(r-1)^2+2^2$$

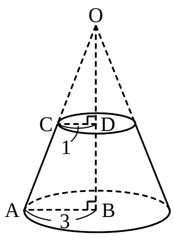
$$2r=5 \quad \to \quad r=\frac{5}{2}$$

「塾技 10（2）」より，$(\text{求める球の体積})=\frac{4}{3}\pi\times\left(\frac{5}{2}\right)^3=\mathbf{\frac{125}{6}\pi}$　答

**解2**

（1）「塾技 86 2」の考えを利用し，円錐台の体積を求め，半球から引けばよい。

右の図のようにもとの円錐を復元し，それぞれの頂点を決める。




AD は，半球の半径と等しいので，△ABD に三平方の定理を用いて，

$$DB=\sqrt{AD^2-AB^2}=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}$$

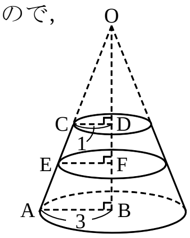
△OCD∽△OAB より，OD $=x$ とおくと，

$$x:(x+3\sqrt{3})=1:3 \qquad \text{これを解いて，} x=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$(\text{求める水の量})=\frac{4\pi}{3}\times6^3\times\frac{1}{2}-\left\{3^2\pi\times\left(3\sqrt{3}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\times\frac{1}{3}-1^2\pi\times\frac{3\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{3}\right\}$$

$$=144\pi-13\sqrt{3}\pi=\mathbf{(144-13\sqrt{3})\pi\ (cm^3)}$$　答

（2）右の図で EF を水面とすると，題意より，(台形 CEFD)∽(台形 EABF)となるので，




CD : EF = EF : AB

1 : EF = EF : 3　　これを解いて，EF $=\sqrt{3}$

一方，△OCD∽△OEF より，OF $=y$ とおくと，

$$\frac{3\sqrt{3}}{2}:y=1:\sqrt{3} \qquad \text{これを解いて，} y=\frac{9}{2}$$

$$(\text{求める体積})=(\sqrt{3})^2\pi\times\frac{9}{2}\times\frac{1}{3}-1^2\pi\times\frac{3\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{3}=\mathbf{\frac{9-\sqrt{3}}{2}\pi\ (cm^3)}$$　答