

問題

右の図は正の整数を 12 列に規則正しく並べたものである。上から m 番目、左から n 番目の数を $\langle m, n \rangle$ と表すことにする。例えば $\langle 2, 3 \rangle = 15$ である。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

このとき、次の問いに答えよ。

- $\langle m, n \rangle$ を m, n を用いて表せ。
- 方程式 $\langle 3x-1, 5y-34 \rangle = 11x + 7y + 1$ を解け。
- 左から n 番目の数を上から m 番目まで足したとき、737 となった。このときの n を求めよ。

(海城高)

解

- (1) まず、 $\langle m, 1 \rangle$ を考える。1 番左の縦の列は、初項 1、公差 12 の等差数列なので、「塾技 99 1 (1)」より、1 番左の上から m 番目の数 $\langle m, 1 \rangle$ は、

$$\langle m, 1 \rangle = 1 + (m-1) \times 12 = 12m - 11$$

一方、 $\langle 1, n \rangle$ を考えると、 $\langle 1, n \rangle = n$ となる。よって、

$$\begin{aligned} \langle m, n \rangle &= \langle m, 1 \rangle + \langle 1, n \rangle - \langle 1, 1 \rangle \\ &= (12m - 11) + n - 1 = \mathbf{12m + n - 12} \end{aligned} \quad \text{答}$$

- (2) $\langle 3x-1, 5y-34 \rangle = 12(3x-1) + 5y-34-12$
 $= 36x + 5y - 58$

題意より、 $36x + 5y - 58 = 11x + 7y + 1$
 $25x - 2y = 59 \quad \dots \textcircled{1}$

ここで、表の横の列には数が 1 個以上 12 個以下あるので、
 $1 \leq 5y - 34 \leq 12 \quad 1 + 34 \leq 5y \leq 12 + 34 \quad 7 \leq y \leq \frac{46}{5} \quad \dots \textcircled{2}$

$\textcircled{2}$ より、 y は 7, 8, 9 のいずれかとわかる。このうち $\textcircled{1}$ の x が整数となる y の値は、 $y = 8$ のときで、このとき $\textcircled{1}$ より $x = 3$ と求まる。 **答** $x = 3, y = 8$

- (3) 左から n 番目の数を上から m 番目まで足した和は、

$$\begin{aligned} & \underbrace{n + (n+12) + (n+12 \times 2) + (n+12 \times 3) + \dots + \{n+12(m-1)\}}_{m \text{ 個}} \\ &= \underbrace{n + n + n + \dots + n}_{m \text{ 個}} + 12 \underbrace{\{1 + 2 + 3 + \dots + (m-1)\}}_{m-1 \text{ 個}} \\ &= mn + 12 \times \frac{\{1 + (m-1)\}(m-1)}{2} \\ & \quad \swarrow \text{初項 } 1, \text{ 末項 } (m-1), \text{ 項数 } (m-1) \text{ の等差数列の和 (塾技 99(2))} \\ &= mn + 6m(m-1) \end{aligned}$$

題意より、 $mn + 6m(m-1) = 737$

$$m(n + 6m - 6) = 11 \times 67$$

m は 11×67 の約数となるので、 $m = 1, 11, 67, 11 \times 67$ のいずれかとなる。

$m = 1$ のとき $n = 737$ 、 $m = 11$ のとき $n = 7$ 、 $m = 67$ 、 11×67 のとき n はともに負。

n は 12 以下の自然数より、 $n = 7$ **答**