

難 塾技 14 連立方程式の未定係数決定法

問題 1

x, y についての 2 つの連立方程式

$$\begin{cases} ax+by=8 \\ \frac{8}{x}+\frac{3}{y}=1 \end{cases} \text{ と } \begin{cases} bx+ay=2 \\ \frac{6}{x}+\frac{4}{y}=-1 \end{cases} \text{ の解が一致す} \\ \text{るとき, } a, b \text{ の値をそれぞれ求めなさい。}$$

(函館ラ・サール高)

問題 2

x, y についての連立方程式を解く問題がノートに書いてある。しかし、汚れていて読めない係数があるので、それを a とすると、 $\begin{cases} 3x-2y=17 \\ ax-4y=45 \end{cases}$ という問題である。係数 a は整数で、解 x, y はいずれも正の整数であるというが、この問題を解くと、解は $x = \square$, $y = \square$ であり、読めない係数 a は \square だとわかる。

(慶應義塾高)

解 1

「塾技 14 2」より、まず未定係数を含まない 2 つの方程式を利用して x, y の値を求め、それらを残りの方程式に代入して未定係数を求めればよい。

$$\begin{cases} ax+by=8 \cdots ① \\ \frac{8}{x}+\frac{3}{y}=1 \cdots ② \end{cases} \begin{cases} bx+ay=2 \cdots ③ \\ \frac{6}{x}+\frac{4}{y}=-1 \cdots ④ \end{cases}$$

「塾技 13 (3)」を用いて②と④を連立する。

$$\frac{1}{x}=A, \frac{1}{y}=B \text{ とおくと, } ②, ④ \text{ は,}$$

$$\begin{cases} 8A+3B=1 \cdots ⑤ \\ 6A+4B=-1 \cdots ⑥ \end{cases}$$

$$⑤ \times 4 - ⑥ \times 3 \text{ より, } 14A=7 \quad A=\frac{1}{2} \cdots ⑦$$

$$⑤ \text{ に代入して, } 4+3B=1 \quad B=-1 \cdots ⑧$$

$$⑦ \text{ より } x=\frac{2}{1}=2, \quad ⑧ \text{ より } y=-\frac{1}{1}=-1 \text{ を}$$

①, ③にそれぞれ代入して,

$$\begin{cases} 2a-b=8 \cdots ⑨ \\ -a+2b=2 \cdots ⑩ \end{cases}$$

$$⑨ \times 2 + ⑩ \text{ より, } 3a=18 \quad a=6$$

$$⑨ \text{ に代入して, } 12-b=8 \quad b=4$$

答 $a=6, b=4$

解 2

$$\begin{cases} 3x-2y=17 \cdots ① \\ ax-4y=45 \cdots ② \end{cases}$$

$$① \times 2 - ② \text{ より, } 6x-ax=-11 \quad x=\frac{11}{a-6}$$

$$① \text{ に代入して } y \text{ について解くと, } y=\frac{-17a+135}{2(a-6)}$$

$$x > 0 \text{ より, } a-6 > 0 \cdots ③$$

$$\text{同様に } y > 0 \text{ より, } -17a+135 > 0 \cdots ④$$

$$③ \text{ より, } a-6 > 0$$

$$a > 6 \cdots ⑤$$

$$④ \text{ より, } -17a+135 > 0$$

$$-17a > -135 \quad \star$$

$$a < \frac{135}{17} \cdots ⑥$$

$$⑤, ⑥ \text{ を同時に満たす整数 } a \text{ の値は, } a=7$$

③, ④に $a=7$ を代入して,

$$x=\frac{11}{7-6}=11 \quad y=\frac{-119+135}{2(7-6)}=8$$

答 $x=11, y=8, a=7$

★ 不等式は、両辺を同じ負の数で割ると、不等号の向きが変わる。

(例) $-4 < 6$ 両辺を -2 で割る $\rightarrow 2 > -3$