難 塾技 23　座標平面上の四角形（3）

問題

右の図 1 で，点 O は原点，曲線 l は関数 $y = x^2$ のグラフ，曲線 m は関数 $y = kx^2 (0 < k < 1)$ のグラフを表している。曲線 l 上に点 O と異なる点 A をとり，点 A を通り y 軸に平行な直線を引き，x 軸との交点を B とする。曲線 m 上に x 座標が 6 である点 C をとり，点 C を通り y 軸に平行な直線を引き，x 軸との交点を D とする。点 A と点 C を結ぶ。点 A の x 座標を $t\ (t < 6)$とする。
次の各問に答えよ。

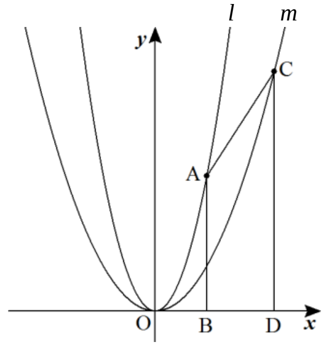
（1）$k = \frac{1}{3}$，$t = 3$ のとき，2 点 A，C を通る直線の式を求めよ。

（2）$t > 0$ のとき，四角形 ABDC が正方形となるような k と t の値をそれぞれ求めよ。

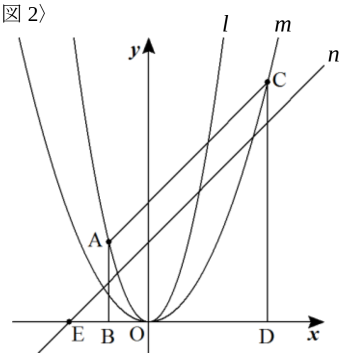
（3）右の図 2 は，図 1 において，$t = -2$ のとき，x 軸上に x 座標が－4 である点 E をとり，点 E を通り線分 AC と平行な直線 n を引いた場合を表している。四角形 ABDC の面積が直線 n によって二等分されるとき，k の値を求めよ。ただし，答えだけでなく，答えを求める過程が分かるように，途中の式や計算なども書け。

（都立日比谷高校）

〈図 1〉



〈図 2〉



解答は次のページ

解

（1） $k=\frac{1}{3}$より，C(6，12)となり，$t=3$ より，A(3，9)となる。

$y=ax+b$ にそれぞれを代入し，

$$\begin{array}{rl} & 12=6a+b \\ -) & 9=3a+b \\ \hline & 3=3a \end{array}$$

$1=a$　　$12=6+b$　　$b=6$　　答　$\boldsymbol{y=x+6}$

（2） A(t，t^2)，B(t，0)，C(6，36k)，D(6，0)とそれぞれ表せる。

四角形 ABDC が正方形より，① AC∥BD　② AB = BD が成り立つ。

①より，(A の y 座標) = (C の y 座標)となるので，

$t^2=36k$　…③

一方，②より，$t^2-0=6-t$

$t^2+t-6=0$

$(t+3)(t-2)=0$

$t=-3,2$　　$t>0$ より，$t=2$

③に $t=2$ を代入して，$4=36k$　　$k=\frac{1}{9}$　　答　$\boldsymbol{k=\frac{1}{9}}$，$\boldsymbol{t=2}$

（3） t＝−2 のとき，A(−2，4)，B(−2，0)，C(6，36k)，D(6，0)となる。

直線 n∥AC より，(直線 n の傾き) = (直線 AC の傾き)

$$=\frac{36k-4}{6-(-2)}=\frac{36k-4}{8}=\frac{9k-1}{2}$$

直線 n は，$y=\frac{9k-1}{2}x+b$ とおける。E(−4，0)を通るので，

$0=-2(9k-1)+b$　　$b=18k-2$

よって，直線 n は，$y=\frac{9k-1}{2}x+18k-2$ となる。

四角形 ABDC は台形なので，「塾技 23（1）」より，直線 n は，AB の中点(−2，2)と，CD の中点(6，18k)を結んだ線分の中点$\left(\frac{-2+6}{2},\frac{2+18k}{2}\right)$ = (2，1 + 9k)を通るので，

$1+9k=\frac{9k-1}{2}\times 2+18k-2$

$1+9k=9k-1+18k-2$

$-18k=-4$

$k=\frac{2}{9}$ $(0<k<1$を満たす)　　答　$\boldsymbol{k=\frac{2}{9}}$