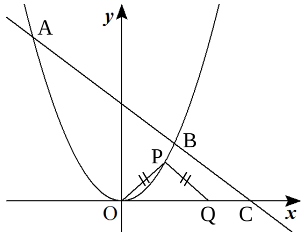
難　塾技 24　座標の求め方

問題

図のように，放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ と直線 l が 2 点 A，B で交わっていて，l の傾きが -1 で，A，B の x 座標の差が 4 であるとする。
また，l と x 軸の交点を C とする。このとき次の問に答えよ。

（1）A，B の座標および l の方程式を求めよ。

（2）点 P が原点 O を出発して放物線上を B まで動き，次に l 上を C まで動くものとする。P を頂点とし，x 軸上に底辺をもつ二等辺三角形 POQ の面積が，$\frac{1}{16}$ となるときの P の x 座標を求めよ。



（慶應義塾志木高）

解　(1) A，B の x 座標の差が 4 という条件が与えられ，座標を求める問題なので，
「塾技 24（2）」より，求めたい座標を文字で置けばよい。
A の x 座標を $t(t<0)$ とおくと，B の x 座標は $t+4$ とおける。l の傾きについて，「塾技 49」より，

$\frac{1}{2}(t+t+4)=-1$　　これを解いて，$t=-3$　　**答**　$\mathbf{A(-3,\ \frac{9}{2}),\ B(1,\ \frac{1}{2})}$

一方，l の y 切片は「塾技 49」より，

$-\frac{1}{2}\times(-3)\times1=\frac{3}{2}$　　**答**　$\boldsymbol{l: y=-x+\frac{3}{2}}$

(2) (1) 同様，△POQ の面積が $\frac{1}{16}$ という条件が与えられ，座標を求める問題なので，
「塾技 24 (2)」を用いる。P が放物線上を動く場合と，直線 l 上を動く場合とに分けて考える。

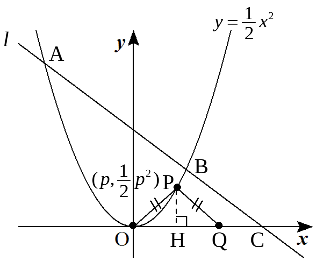
＜P が放物線上を動くとき＞

P の x 座標を p とおくと，P は放物線上の点なので $\mathrm{P}(p,\ \frac{1}{2}p^2)$ と表すことができる。P から OQ に垂線 PH を下ろすと，H は OQ の中点となるので，Q$(2p,\ 0)$となる。
△POQ の面積で立式して，

$$2p\times\frac{1}{2}p^2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$$

$$\frac{p^3}{2}=\frac{1}{16}\xrightarrow{\text{両辺を 2 倍}}p^3=\frac{1}{8}=\left(\frac{1}{2}\right)^3\ \rightarrow\ p=\frac{1}{2}$$

B$(1,\ \frac{1}{2})$より，$0\leqq p\leqq1$ となるので，これを満たしている。



＜P が直線 l 上を動くとき＞

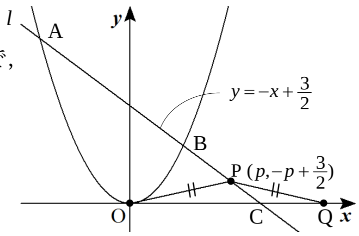
P の x 座標を p とおくと，P は l 上の点なので $\mathrm{P}(p,\ -p+\frac{3}{2})$ と表すことができる。上と同様に考え，Q$(2p,\ 0)$となるので，
△POQ の面積で立式すると，

$$2p\times\left(-p+\frac{3}{2}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{16}\quad \text{両辺を 16 倍}$$

$$16p\left(-p+\frac{3}{2}\right)=1$$

$$-16p^2+24p=1$$

$$16p^2-24p+1=0\xrightarrow{\text{解の公式}}p=\frac{24\pm\sqrt{576-64}}{32}=\frac{24\pm16\sqrt{2}}{32}=\frac{3\pm2\sqrt{2}}{4}$$



P は，B$(1,\ \frac{1}{2})$，C$(\frac{3}{2},\ 0)$の間にあるので，$1\leqq p\leqq\frac{3}{2}$ より，$p=\frac{3+2\sqrt{2}}{4}$　　**答**　$\mathbf{\frac{1}{2},\ \frac{3+2\sqrt{2}}{4}}$