

難

塾技 39 平方根の大小

問題 1

n を自然数とすると、 $n < \sqrt{m} < n+1$ を満たす自然数 m の個数を n で表せ。 (慶應義塾志木高)

問題 2

$a < \sqrt{x} < a+2$ を満たす正の整数 x の個数が 115 のとき、整数 a の値を求めよ。 (ラ・サール高)

問題 3

m は一桁の自然数、 n は自然数とすると、 $\sqrt{11}$ と $\sqrt{12}$ の間にある $\frac{n}{m}$ の形で表される m, n の組は何組あるか。 (早稲田大本庄高改題)

解 1

「塾技 39」判定法②より、

$$\begin{aligned} n^2 &< (\sqrt{m})^2 < (n+1)^2 \\ n^2 &< m < n^2 + 2n + 1 \end{aligned}$$

これを満たす自然数 m の個数は、

「塾技 39」例題補足より、

$$m = n^2 + 2n + 1 - n^2 - 1 = 2n(\text{個}) \quad \leftarrow \text{答}$$

解 2

「塾技 39」判定法②より、

$$\begin{aligned} a^2 &< (\sqrt{x})^2 < (a+2)^2 \\ a^2 &< x < a^2 + 4a + 4 \end{aligned}$$

これを満たす正の整数 x の個数が 115 と

なるので、「塾技 39」例題補足より、

$$a^2 + 4a + 4 - a^2 - 1 = 115$$

$$4a = 112$$

$$a = 28 \quad \leftarrow \text{答}$$

解 3

$$\sqrt{11} < \frac{n}{m} < \sqrt{12} \xrightarrow{\text{各辺を } m \text{ 倍}} \sqrt{11}m < n < \sqrt{12}m \xrightarrow{\text{各辺を 2 乗}} 11m^2 < n^2 < 12m^2$$

$m = 1$ のとき $11 < n^2 < 12$ となり、これを満たす自然数 n はない。

$m = 2$ のとき $44 < n^2 < 48$ となり、これを満たす自然数 n はない。

$m = 3$ のとき $99 < n^2 < 108$ となり、これを満たす自然数 n は、 $n = 10$

$m = 4$ のとき $176 < n^2 < 192$ となり、これを満たす自然数 n はない。

$m = 5$ のとき $275 < n^2 < 300$ となり、これを満たす自然数 n は、 $n = 17$

$m = 6$ のとき $396 < n^2 < 432$ となり、これを満たす自然数 n は、 $n = 20$

$m = 7$ のとき $539 < n^2 < 588$ となり、これを満たす自然数 n は、 $n = 24$

$m = 8$ のとき $704 < n^2 < 768$ となり、これを満たす自然数 n は、 $n = 27$

$m = 9$ のとき $891 < n^2 < 972$ となり、これを満たす自然数 n は、 $n = 30, 31$

以上より、 $(m, n) = (3, 10) (5, 17) (6, 20) (7, 24) (8, 27) (9, 30) (9, 31)$ の 7 組 $\leftarrow \text{答}$