難 塾技 41　平方根と平方数

問題

自然数 n に対し，正の平方根 $\sqrt{n}$ を考える。ここで，$\sqrt{n}$ が無理数のとき，$\sqrt{n}\times\sqrt{a}$ が有理数になるような最小の自然数 a を考え，それを $<n>$ で表すことにする。また，$\sqrt{n}$ が有理数であるときは，$<n>=1$ と定める。

例 ① $n=12$ のとき $\sqrt{n}=\sqrt{12}=\sqrt{2^2\times 3}$ で，これに $\sqrt{3}$ をかければ有理数になるから $<12>=3$

② $n=4$ のとき $\sqrt{n}=\sqrt{4}=2$ で，これは有理数であるから $<4>=1$

［問 1］$<90>$ の値を求めよ。

［問 2］次の式を満たす自然数 n のうち，100 以下のものをすべて求めよ。

（ i ）$<n>=5$　　（ ii ）$<8n>=5$　　（iii）$<18n>+\dfrac{<60>}{<8n>}=8$　　（慶應義塾高）

解

［問 1］$\sqrt{90}=3\sqrt{10}$ より，$\sqrt{10}$ をかければよい。よって，$<90>=$ **10** 答

［問 2］（ i ）$<n>=5$ および「塾技 41 手順②」より，$n=5k^2$（k は自然数）とおける。

$k=1$ のとき，$n=5$　　$k=2$ のとき，$n=20$　　$k=3$ のとき，$n=45$　　$k=4$ のとき，$n=80$

$k=5$ 以上のとき，n の値は 100 より大きくなるので，$\boldsymbol{n=5,\ 20,\ 45,\ 80}$ 答

（ ii ）「塾技 41 手順①」より，$\sqrt{8n}=2\sqrt{2n}$　　よって，$n=2\times5\times k^2$（k は自然数）$=10k^2$ とおける。

$k=1$ のとき，$n=10$　　$k=2$ のとき，$n=40$　　$k=3$ のとき，$n=90$

$k=4$ 以上のとき，n の値は 100 より大きくなるので，$\boldsymbol{n=10,\ 40,\ 90}$ 答

（iii）$<60>$ の値は，$\sqrt{60}=2\sqrt{15}$ より，$<60>=15$

よって，$<18n>+\dfrac{15}{<8n>}=8$ を満たす n の値を求めればよい。ここで，$<18n>$ の値は 1 以上の自然数となるので，$\dfrac{15}{<8n>}$ は 7 以下の自然数となる。よって，$<8n>=3$ 又は 5 又は 15 となる。

① $<8n>=3$ のとき

$\sqrt{8n}=2\sqrt{2n}$ より，$n=2\times3\times k^2$（k は自然数）$=6k^2$ とおける。

このとき，$<18n>+\dfrac{15}{3}=8$ より，$<18n>=3$ となる。

$\sqrt{18n}=3\sqrt{2n}$ より，$<18n>=3$ を満たす n は，同様に $n=6k^2$ とおける。

$k=1$ のとき，$n=6$　　$k=2$ のとき，$n=24$　　$k=3$ のとき，$n=54$　　$k=4$ のとき，$n=96$

$k=5$ 以上のとき，n の値は 100 より大きくなるので，$n=6,\ 24,\ 54,\ 96$

② $<8n>=5$ のとき

$\sqrt{8n}=2\sqrt{2n}$ より，$n=2\times5\times m^2$（m は自然数）$=10m^2$ とおける。

このとき，$<18n>+\dfrac{15}{5}=8$ より，$<18n>=5$ となる。

$\sqrt{18n}=3\sqrt{2n}$ より，同様に $n=10m^2$ とおける。よって（ ii ）より，$n=10,\ 40,\ 90$

③ $<8n>=15$ のとき

$\sqrt{8n}=2\sqrt{2n}$ より，$n=2\times15\times p^2$（p は自然数）$=30p^2$ とおける。

このとき，$<18n>+\dfrac{15}{15}=8$ より，$<18n>=7$ となる。

$\sqrt{18n}=3\sqrt{2n}$ より，$n=2\times7\times q^2$（q は自然数）$=14q^2$ とおける。

n は，30 と 14 の公倍数となるが，最小公倍数は 210 より 100 以下の自然数 n でこれを満たすものはない。

以上より，求める n の値は，$\boldsymbol{n=6,\ 10,\ 24,\ 40,\ 54,\ 90,\ 96}$ 答