

難

塾技 43 2 次方程式の解法

問題 1

次の方程式を解きなさい。

$$x^2 + (1 - \sqrt{2} - \sqrt{3})x + \sqrt{6} - \sqrt{2} = 0$$

(慶應義塾高)

問題 2

x についての 2 次方程式 $(x + \sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - 3\sqrt{3}(x + \sqrt{2} - 2\sqrt{3}) - 21 = 0$ の解は、 $x = \square$ である。

(慶應義塾高)

問題 3

x についての方程式 $ax^2 + 2bx + c = 0 \cdots \textcircled{1}$ について次の問いに答えよ

- (1) 「 $a=0$ 」かつ「 b が0でない」とき①を解け。
- (2) 「 a が0でない」とき、①を $(x+p)^2 = q \cdots \textcircled{2}$ の形に変形し、 p と q を a, b, c を用いて表せ。
- (3) 「 $a > 0$ 」かつ「 $b^2 - ac \geq 0$ 」のとき、②の変形を用いて①を解け。

(早稲田大本庄高)

解 1

「塾技 43 解法 2」のたすき掛けによる因数分解 (塾技 37) により解けばよい。

$$x^2 + (1 - \sqrt{2} - \sqrt{3})x + \sqrt{6} - \sqrt{2} = 0$$

1	$-\sqrt{2}$
1	$-\sqrt{3} + 1$

$$(x - \sqrt{2})(x - \sqrt{3} + 1) = 0$$

☞ $x = \sqrt{2}, \sqrt{3} - 1$

解 2

$x + \sqrt{2} = a$ とおくと、

$$(a + \sqrt{3})^2 - 3\sqrt{3}(a - 2\sqrt{3}) - 21 = 0$$

$$a^2 + 2\sqrt{3}a + 3 - 3\sqrt{3}a + 18 - 21 = 0$$

$$a^2 - \sqrt{3}a = 0$$

$$a(a - \sqrt{3}) = 0$$

$$a = 0, \sqrt{3}$$

$x + \sqrt{2} = 0$ のとき、 $x = -\sqrt{2}$

$x + \sqrt{2} = \sqrt{3}$ のとき、 $x = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

☞ $x = -\sqrt{2}, \sqrt{3} - \sqrt{2}$

解 3

(1) ①に $a = 0$ を代入して、

$$2bx + c = 0$$

$$2bx = -c$$

$$x = -\frac{c}{2b} \quad \text{☞ 答}$$

(2), (3) 「塾技 43 解法 4」の平方完成を用いる。

$$ax^2 + 2bx + c = 0$$

☞ 両辺を a で割る

$$x^2 + \frac{2b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

☞ 定数項を右边に移項

$$x^2 + \frac{2b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

☞ 両辺に x の係数の $\frac{1}{2}$ の 2 乗を加える

$$x^2 + \frac{2b}{a}x + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{a}\right)^2$$

☞ 左辺を因数分解

$$\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b^2 - ac}{a^2}$$

☞ 「塾技 43 解法 1」

$$x + \frac{b}{a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

(2) $p = \frac{b}{a}, q = \frac{b^2 - ac}{a^2}$

(3) $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$

