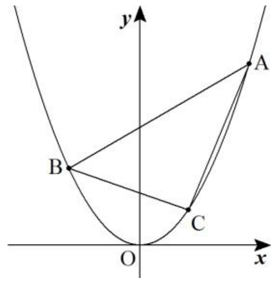
難 塾技 49　放物線と直線（1）

問題 1

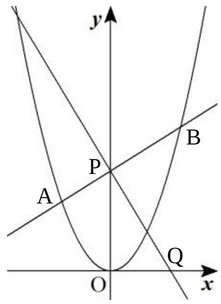


図の放物線 $y=x^2$ 上に 3 点 A，B，C があり，それぞれの x 座標は a，b，c である。このとき，3 つの直線 AB，BC，CA の傾きは，それぞれ 1，$-\frac{1}{2}$，3 である。次の問いに答えよ。

（1）a，b，c の値を求めよ。

（2）△ABC の面積を求めよ。　（ラ・サール高）

問題 2



放物線 $y=x^2$ 上に 2 点 A, B があり，それらの x 座標はそれぞれ a, b である。ただし，$a<0<b$ とする。直線 AB と y 軸との交点を P とする。P を通り，直線 AB に垂直な直線と x 軸との交点を Q とする。次の各問いに答えよ。

（1）点 P の y 座標 p を a，b を用いて表せ。

（2）点 Q の x 座標 q を a，b を用いて表せ。

（3）△AQB の面積 S を a，b を用いて表し，因数分解した式で答えよ。　（東大寺学園高）

解 1

（1）「塾技 49」の傾きの公式より，

$$\begin{cases} \text{AB の傾きについて：} 1\times(b+a)=1 & \cdots ① \\ \text{BC の傾きについて：} 1\times(b+c)=-\frac{1}{2} & \cdots ② \\ \text{CA の傾きについて：} 1\times(c+a)=3 & \cdots ③ \end{cases}$$

①，②，③の連立方程式を解けばよい。

①＋②＋③より，

$$2a+2b+2c=\frac{7}{2} \quad \cdots ④$$

④－①×2 より，

$$\begin{array}{rl} & 2a+2b+2c=\frac{7}{2} \\ -) & 2a+2b \qquad\;\, =2 \\ \hline & 2c=\frac{3}{2} \end{array}$$

よって，$\boldsymbol{c=\frac{3}{4}}$ 答

同様に，④－②×2 より，$\boldsymbol{a=\frac{9}{4}}$ 答

④－③×2 より，$\boldsymbol{b=-\frac{5}{4}}$ 答

（2）C を通り y 軸に平行な直線と，AB との交点を D とする。AB：$y=x+\frac{45}{16}$ より，D $\left(\frac{3}{4},\ \frac{57}{16}\right)$

「塾技 17（2）」より，

$$\triangle ABC=\left(\frac{57}{16}-\frac{9}{16}\right)\times\left\{\frac{9}{4}-\left(-\frac{5}{4}\right)\right\}\times\frac{1}{2}$$

$$=\boldsymbol{\frac{21}{4}}$$ 答

解 2

（1）求める座標は，直線 AB の y 切片となるので，「塾技 49」の y 切片の公式より，

$$\boldsymbol{p=-1\times a\times b=-ab}$$ 答

（2）直線 AB の傾きは「塾技 49」の公式より，

AB の傾き $=1\times(a+b)=a+b$

よって，「塾技 15 2（ⅰ）(2)」より，

$$\text{PQの傾き}=-\frac{1}{a+b} \rightarrow \text{PQ}: y=-\frac{1}{a+b}x-ab$$

点 Q の x 座標 q は，Q(q，0)を代入して，

$$0=-\frac{1}{a+b}q-ab$$

これをqについて解き，$\boldsymbol{q=-ab(a+b)}$ 答

（3）点 Q を通り y 軸に平行な直線と，AB との交点を C とする。AB：$y=(a+b)x-ab$ より，

C($-ab(a+b)$，$-ab(a+b)^2-ab$)

「塾技 17（2）」より，

$$S=\left\{-ab(a+b)^2-ab\right\}\times(b-a)\times\frac{1}{2}$$

$b-a$ $=-(a-b)$

$$=\frac{1}{2}ab(a-b)(a+b)^2+\frac{1}{2}ab(a-b)$$

$$=\frac{1}{2}ab(a-b)\left\{(a+b)^2+1\right\}$$

$$\boldsymbol{S=\frac{1}{2}ab(a-b)(a^2+2ab+b^2+1)}$$ 答