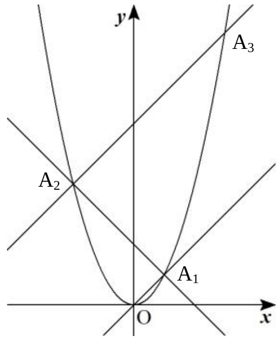
難 塾技 50　放物線と直線（2）

問題

図のように，原点 O を通る傾き 1 の直線と放物線 $y=x^2$ の交点 $A_1(1,\ 1)$ をとる。次に，点 A_1 を通る傾き－1 の直線と放物線の別の交点を A_2 とする。さらに，点 A_2 を通る傾き 1 の直線と放物線の別の交点を A_3 とする。以下同様に，傾き－1，1，－1，・・・・・・の直線と放物線の交点を順に A_4，A_5，A_6，・・・・・・とする。



（1）次の空欄を埋めよ。（答えのみでよい。）

点 A_2，A_3 の座標を順に求めると，2 点 A_1，A_2 を通る直線の方程式は $y=$ $\boxed{}$ であるから $A_2(\boxed{},\ \boxed{})$ が求まり，2 点 A_2，A_3 を通る直線の方程式は $y=$ $\boxed{}$ であるから $A_3(\boxed{},\ \boxed{})$ が求まる。以上の結果より，点 A_{10} の座標は $(\boxed{},\ \boxed{})$ と推定できる。

（2）$OA_1+A_1A_2+A_2A_3+\cdots\cdots+A_9A_{10}$ を求めよ。

（慶應義塾高）

解

（1）A_1 の x 座標は 1 とわかっているので，「塾技 50（2）」より，A_2 の x 座標を a_2 とし「塾技 49」の傾きの公式を用いて立式すればよい（塾技 50 塾技解説参照）。

$1\times(1+a_2)=-1$

$a_2=-2$　　よって，$A_2(\mathbf{-2},\ \mathbf{4})$ 答

一方，直線 A_1A_2 の y 切片は，「塾技 49」の y 切片の公式より，

$-1\times(-2)\times1=2$　　よって，A_1A_2 の方程式は，$y=\mathbf{-x+2}$ 答

同様に，A_3 の x 座標を a_3 とすると，

$1\times(-2+a_3)=1$

$a_3=3$　　よって，$A_3(\mathbf{3},\ \mathbf{9})$ 答

A_2A_3 の y 切片 $=-1\times(-2)\times3=6$　　よって A_2A_3 の方程式は，$y=\mathbf{x+6}$ 答

A_1，A_2，A_3 の x 座標は，それぞれ 1，－2，3 となることより，(A_4 の x 座標) $=-4$，(A_5 の x 座標) $=5$・・・・・・と推定できるので，$A_{10}(\mathbf{-10},\ \mathbf{100})$ 答

（2）$OA_1=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，$A_1A_2=\sqrt{\{1-(-2)\}^2+(4-1)^2}=3\sqrt{2}$，$A_2A_3=\sqrt{\{3-(-2)\}^2+(9-4)^2}=5\sqrt{2}$

となるので，$A_3A_4=7\sqrt{2}$，$A_4A_5=9\sqrt{2}$ ・・・・・・と推定できる。よって，

$OA_1+A_1A_2+A_2A_3+\cdots\cdots+A_9A_{10}$

$=\sqrt{2}+3\sqrt{2}+5\sqrt{2}+7\sqrt{2}+9\sqrt{2}+\cdots\cdots+19\sqrt{2}$

$=(1+3+5+7+9+\cdots\cdots+19)\sqrt{2}$

$=10^2\sqrt{2}$

$=\mathbf{100\sqrt{2}}$ 答

（　　）の中は，1 番目から 10 番目までの奇数列の和となるので、「塾技 99 **1**（3）」より 10^2 と求まる