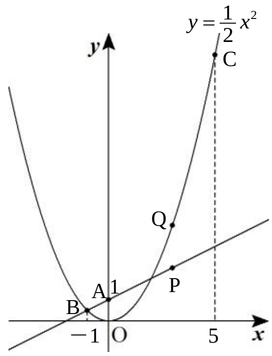
難 塾技 51　放物線と三角形

問題

右の図のように，点 A(0, 1)と関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ …①のグラフがある。①のグラフ上の 2 点 B，C の x 座標はそれぞれ－1，5 である。また，点 P は直線 AB 上に，点 Q は①のグラフ上にある。次の問いに答えなさい。



(1) P，Q の x 座標がともに t であり，P の y 座標が Q の y 座標よりも小さいとき，線分 PQ の長さを t の式で表しなさい。

(2) △OBP の面積が△OAB と△OAC の面積の和に等しいとき，P の座標として考えられるものをすべて求めなさい。

(3) △OBQ の面積が△OAB と△OAC の面積の和に等しいとき，Q の座標として考えられるものをすべて求めなさい。

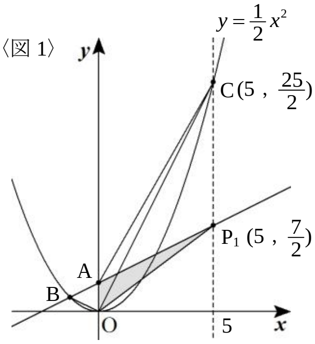
（筑波大附駒場高）

解

(1) A(0, 1)，B$(-1,\ \frac{1}{2})$より，直線 AB は $y=\frac{1}{2}x+1$ とわかる。点 P は直線 AB 上の点なので，P$(t,\ \frac{1}{2}t+1)$，点 Q は放物線上の点なので，Q$(t,\ \frac{1}{2}t^2)$とそれぞれ表すことができる。よって，

線分 $PQ=\frac{1}{2}t^2-(\frac{1}{2}t+1)=\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t-1$　　答 $\boldsymbol{\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t-1}$

〈図 1〉



(2) (P の x 座標) > 0 のとき，求める点 P を P_1 とすると，

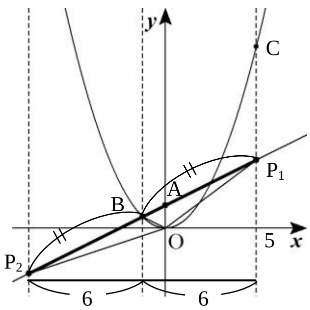
△OBP_1 = △OAB＋△OAP_1

これが，△OAB と△OAC の面積の和に等しくなるためには，△OAB をともに持つので，△OAP_1 = △OAC となるような点 P_1 を求めればよい。よって，「塾技 19 (2)」より，図 1 のように等積変形すると，$P_1(5,\ \frac{7}{2})$と求まる。

一方，(P の x 座標) < 0 のとき，求める点 P を P_2 とすると，△OBP_1 = △OBP_2 となるような点 P_2 を求めればよいので，図 2 のように等積変形すると，P_2 は，P_1 を点 B について対称移動させた点とわかる。P_2 の x 座標＝－1－6＝－7 より，

$P_2(-7,\ -\frac{5}{2})$　　答 $\boldsymbol{(5,\ \frac{7}{2}),\ (-7,\ -\frac{5}{2})}$

〈図 2〉



(3) (2) より，△OBP_1 =△OAB +△OAC となるので，求める点 Q は△OBQ =△OBP_1 となるような点となる。「塾技 19 (2)」より，P_1 を通り，直線 OB と平行な直線と①との交点が Q となる。よって，

$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x^2 \\ y=-\frac{1}{2}x+6 \end{cases} \xrightarrow{\text{代入法}} \frac{1}{2}x^2=-\frac{1}{2}x+6 \qquad (x+4)(x-3)=0 \text{ より，} x=-4,\ 3$$

答 $\boldsymbol{(-4,\ 8),\ (3,\ \frac{9}{2})}$