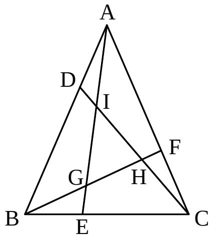
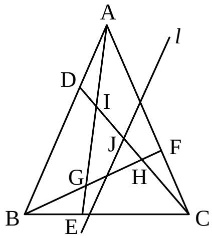
難 塾技 58　メネラウスの定理

問題

図 1 の△ABC において，AB = AC = 13cm，BC = 10cm，AD : DB = BE : EC = CF : FA = 1 : 2 である。AE と BF の交点を G，BF と CD の交点を H，CD と AE の交点を I とする。次の各問いに答えよ。



〈図 1〉



〈図 2〉

（1）DI : IC を求めよ。

（2）△GHI の面積を求めよ。

（3）図 2 のように，AB と平行な直線 l で△GHI を 2 つに分けたとき，点 I を 1 つの頂点とする四角形の面積と点 H を 1 つの頂点とする三角形の面積の比が 2 : 1 になった。直線 l と DC の交点を J とするとき，IH : JH を求めよ。（早稲田実業高）

解（1）「塾技 58」のメネラウスの定理より，

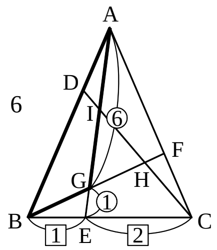
$\frac{AD}{BA}\times\frac{IC}{DI}\times\frac{EB}{CE}=1$　　$\frac{1}{3}\times\frac{IC}{DI}\times\frac{1}{2}=1$　　$\frac{1}{6}\times\frac{IC}{DI}=1$　　答 **DI : IC = 1 : 6**

（2）（1）と同様に，メネラウスの定理で EG : GA および FH : HB を求める。

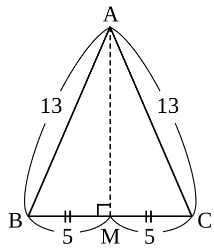
$\frac{BE}{CB}\times\frac{GA}{EG}\times\frac{FC}{AF}=1$　　$\frac{CF}{AC}\times\frac{HB}{FH}\times\frac{DA}{BD}=1$

$\frac{1}{3}\times\frac{GA}{EG}\times\frac{1}{2}=1$　　$\frac{1}{3}\times\frac{HB}{FH}\times\frac{1}{2}=1$

→　EG : GA = 1 : 6　　→　FH : HB = 1 : 6



〈図 I〉



〈図 II〉

ここで△ABC の面積を S とすると，図 I より，

$\triangle ABG = S\times\frac{BE}{BC}\times\frac{AG}{AE}=S\times\frac{1}{3}\times\frac{6}{7}=\frac{2}{7}S$

同様に，$\triangle BCH=\triangle ACI=\frac{2}{7}S$ となるので，

求める△GHI は，全体から 3 つの三角形を引いて，

$\triangle GHI=\triangle ABC-\triangle ABG-\triangle BCH-\triangle ACI=S-\frac{2}{7}S-\frac{2}{7}S-\frac{2}{7}S=\frac{1}{7}S$

図 II より，△ABC の高さ AM は 12 とわかるので，$\triangle GHI=\frac{1}{7}S=\frac{1}{7}\times10\times12\times\frac{1}{2}=$ $\mathbf{\frac{60}{7}}$ **(cm²)** 答

（3）直線 l と GH との交点を K とすると，JK∥DB より，△HJK∽△HDB となる。（2）と同様に△ABC の面積を S とすると，（2）より，$\triangle GHI=\frac{1}{7}S$ なので，$\triangle HJK=\frac{1}{3}\triangle GHI=\frac{1}{21}S$

一方，△HDB = △ABC－△BCH－△ACD より，$\triangle HDB=S-\frac{2}{7}S-\frac{1}{3}S=\frac{8}{21}S$

$\triangle HJK:\triangle HDB=\frac{1}{21}S:\frac{8}{21}S=1:8$

HJ : HD = 1 : x とおくと，「塾技 62 2」より，

$1^2:x^2=1:8$　　$x^2=8$　　$x=2\sqrt{2}$ (>0)　　よって，$HJ=\frac{1}{2\sqrt{2}}DH=\frac{\sqrt{2}}{4}DH$　…①

ここで，「塾技 58」のメネラウスの定理より，

$\frac{BD}{AB}\times\frac{HC}{DH}\times\frac{FA}{CF}=1$　　$\frac{2}{3}\times\frac{HC}{DH}\times\frac{2}{1}=1$　　$\frac{4}{3}\times\frac{HC}{DH}=1$　→　$DH:HC=4:3$　…②

②より，$DH=\frac{4}{4+3}DC=\frac{4}{7}DC$ を①に代入し，$HJ=\frac{\sqrt{2}}{4}\times\frac{4}{7}DC=\frac{\sqrt{2}}{7}DC$　…③

また，IH = DH－DI より，$IH=\frac{4}{7}DC-\frac{1}{1+6}DC=\frac{3}{7}DC$　…④

③，④より，$IH:JH=\frac{3}{7}DC:\frac{\sqrt{2}}{7}DC=$ $\mathbf{3:\sqrt{2}}$ 答