難 塾技 60　相似図形の定理・性質（3）

問題

放物線 $y=x^2$ 上の点 A(2, 4)を通る直線 l を考える。ただし，l は y 軸に平行でないものとする。

（1）l と $y=x^2$ とが，点 A 以外の点 B をも共有しているとき，直線 l の傾き k を用いて点 B の座標を表せ。

（2）l と $y=x^2$ とが，点 A 以外で共有点をもたないとき，直線 l を表す方程式を求めよ。

（3）（2）で求めた直線 l に対し，l と x 軸との交点を C とする。また，点 A を通り y 軸と平行な直線を m とし，m と x 軸との交点を D とする。さらに∠CAE =∠CAD となるように点 D と異なる x 軸上の点 E をとる。このとき，

（ア）直線 AE と y 軸との交点を F とするとき，点 F の座標を求めよ。

（イ）△AEC の外接円と直線 m との交点で点 A と異なる点を G とするとき，点 G の座標を求めよ。（開成高）

解

（1）点 B の x 座標を b とすると，「塾技 49」の傾きの公式より，

$1\times(2+b)=k$ → $b=k-2$　よって，B($k-2$, $(k-2)^2$) = **B($k-2$, k^2-4k+4)** 答

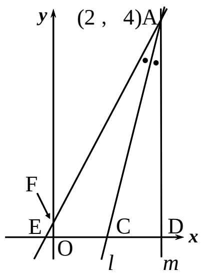
（2）（1）の点 B と点 A が一致すればよいので，(点 B の x 座標) = (点 A の x 座標)より，

$k-2=2$ → $k=4$

$y=4x+b$ に A(2, 4)を代入して，$b=-4$　答 **$y=4x-4$**

（3）

（ア）l：$y=4x-4$ より，C(1, 0)とわかる。ここで，E(e, 0)とおくと，



$$AE=\sqrt{(2-e)^2+4^2}=\sqrt{e^2-4e+20}$$

「塾技 60 **1**」より，AE：AD = CE：DC が成り立つので，

$$\sqrt{e^2-4e+20} : 4=(1-e):(2-1)$$

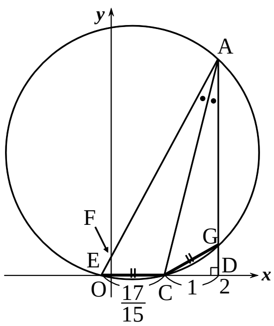
$$e^2-4e+20 : 4^2=(1-e)^2 : 1^2$$

$$e^2-4e+20=16(1-e)^2$$

$$15e^2-28e-4=0 \qquad (15e+2)(e-2)=0 \qquad e=-\frac{2}{15},\ 2 \ \rightarrow\ e=-\frac{2}{15}$$

直線 AE は，$y=ax+b$ に A(2, 4)，E($-\frac{2}{15}$, 0)を代入して，

$a=\frac{15}{8}$，$b=\frac{1}{4}$　答 **F(0, $\frac{1}{4}$)**



（イ）∠CAE =∠CAD より，弦 EC = 弦 CG = $1-(-\frac{2}{15})=\frac{17}{15}$

∠CDG = 90°より，△CDG で三平方の定理を用いて，

$$GD=\sqrt{CG^2-CD^2}=\sqrt{(\frac{17}{15})^2-1^2}=\frac{8}{15}$$

答 **G(2, $\frac{8}{15}$)**