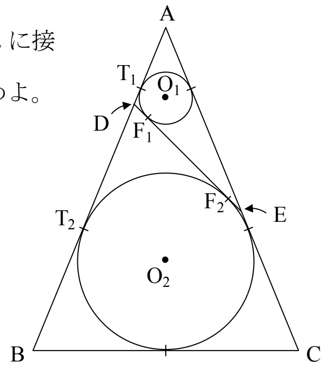
難 塾技 67　円と接線

問題



右の図で，円 O_1 は△ABC の 2 辺と線分 DE に接し，円 O_2 は 3 辺と DE に接している。$AB = AC = 13$，$BC = 10$，O_1 の半径 $= \frac{5}{6}$ のとき，次の値を求めよ。

（1）O_2 の半径

（2）F_1F_2 の長さ

（3）DT_1 の長さ

（東大寺学園高）

解

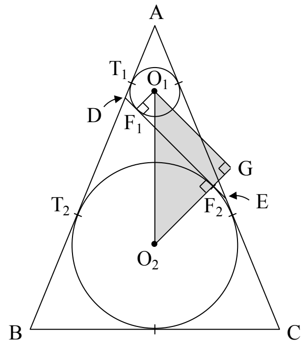


図 1

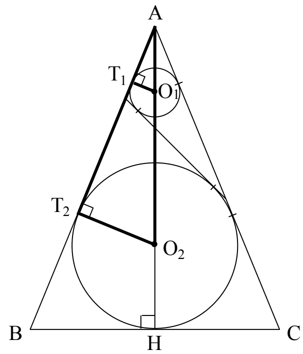


図 2

（1）A から BC に下ろした垂線の足を H とすると，△ABH は「塾技 71 **2** 」の 5 : 12 : 13 の直角三角形となるので，AH = 12 とわかる。O_2 の半径を r_2 とすると，「塾技 68（4）」より，

$$\frac{r_2}{2}(13+10+13) = 10\times12\times\frac{1}{2} \qquad 18r_2 = 60 \qquad r_2 = \frac{10}{3}$$

答 $\boldsymbol{\frac{10}{3}}$

（2）「塾技 70（3）」を利用し，中心線を斜辺とする直角三角形を作って考えればよい。右の図 1 のような直角三角形 O_1O_2G を作ると，$F_1F_2 = O_1G$ となるので，

$$F_1F_2 = O_1G = \sqrt{(O_1O_2)^2-(O_2G)^2} \quad \cdots ①$$

ここで，図 2 において，$\triangle AT_1O_1 \backsim \triangle AT_2O_2$ となり，

$$AO_1 : AO_2 = T_1O_1 : T_2O_2 = \frac{5}{6} : \frac{10}{3} = 1:4$$

よって，$O_1O_2 = AO_2 \times \frac{3}{4} = \left(12-\frac{10}{3}\right)\times\frac{3}{4} = \frac{13}{2}$

一方，$O_2G = O_2F_2 + F_2G = O_2F_2 + O_1F_1 = \frac{5}{6}+\frac{10}{3} = \frac{25}{6}$

以上より，$① = \sqrt{\left(\frac{13}{2}\right)^2-\left(\frac{25}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{224}{9}} = \frac{4\sqrt{14}}{3}$

答 $\boldsymbol{\frac{4\sqrt{14}}{3}}$

（3）「塾技 67（1）」より，$DT_1 = DF_1$，$DT_2 = DF_2$ が成り立つことを利用し，T_1T_2 の長さに着目して求めればよい。

$$\begin{aligned} T_1T_2 &= DT_1 + DT_2 = DT_1 + DF_2 \\ &= DT_1 + DF_1 + F_1F_2 \\ &= DT_1 + DT_1 + F_1F_2 \\ &= 2DT_1 + F_1F_2 \end{aligned}$$

$DF_2 = DF_1 + F_1F_2$

$DF_1 = DT_1$

よって，$T_1T_2 = 2DT_1 + F_1F_2$ となるので，$DT_1 = \frac{1}{2}(T_1T_2 - F_1F_2)$

ここで，（2）の図 2 の相似より，$T_1T_2 = AT_2\times\frac{3}{4} = (AB-BT_2)\times\frac{3}{4} = (AB-BH)\times\frac{3}{4} = 8\times\frac{3}{4} = 6$

以上より，$DT_1 = \frac{1}{2}\left(6-\frac{4\sqrt{14}}{3}\right) = 3-\frac{2\sqrt{14}}{3}$

答 $\boldsymbol{3-\frac{2\sqrt{14}}{3}}$