難 塾技 69　外接円

問題

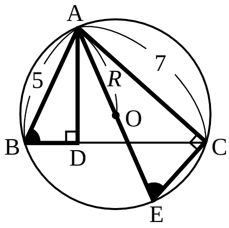
AB = 5，AC = 7 である△ABC の辺 BC 上に AD⊥BC となるような点 D がある。次の問いに答えよ。

（1）△ABC の外接円の半径の長さを R とする。AD の長さを R を用いて表せ。

（2）BC = 8 のとき，AD の長さを求めよ。

（3）△ABC の外接円の中心を O，△ABD の外接円の中心を P，△ADC の外接円の中心を Q とする。BC= 8 のとき，△OPQ の面積 S を求めよ。　（早稲田大学本庄高）

解



（1）「塾技 69（3）」の手順に従って解けばよい。

右の図で，△ABD∽△AEC より，

AB：AE = AD：AC

5：2R = AD：7

$\mathbf{AD = \dfrac{35}{2R}}$ 答

（2）「塾技 73」の手順に従って解けばよい。

AD = h，BD = x，CD = 8－x とおく。

△ABD に三平方の定理を用いて，$h^2 = 5^2 - x^2$ …①

△ACD に三平方の定理を用いて，$h^2 = 7^2 - (8-x)^2$ …②

①＝②より，$5^2 - x^2 = 7^2 - (8-x)^2$

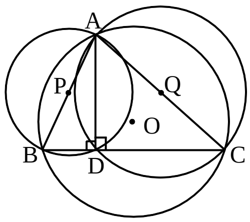
$x = \dfrac{5}{2}$　　$h^2 = 5^2 - \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 = \dfrac{75}{4}$　　$h > 0$ より，$h = \mathbf{\dfrac{5\sqrt{3}}{2}}$ 答

（3）△ABD，△ADC はともに直角三角形なので，「塾技 69（2）」より，

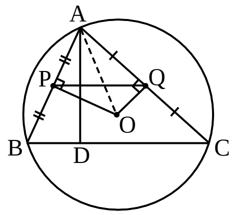
斜辺がそれぞれの外接円の直径となる（図 1）。

ここで，P，Q はそれぞれ AB，AC の中点なので，

図 2 より，OP，OQ は線分 AB，AC の垂直二等分線となる。一方，（1），（2）より



〈図 1〉



〈図 2〉

$\dfrac{35}{2R} = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

$\dfrac{35}{R} = 5\sqrt{3}$

$5\sqrt{3}R = 35$　　$R = \dfrac{7}{\sqrt{3}} = \dfrac{7\sqrt{3}}{3}$

△AOP に三平方の定理を用いて，OP = $\sqrt{\left(\dfrac{7\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \left(\dfrac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{363}{36}} = \dfrac{11\sqrt{3}}{6}$

△AOQ に三平方の定理を用いて，OQ = $\sqrt{\left(\dfrac{7\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \left(\dfrac{7}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{147}{36}} = \dfrac{7\sqrt{3}}{6}$

△OPQ = 四角形 APOQ－△APQ

S =△APO +△AQO－△APQ

ここで，△APQ∽△ABC なので「塾技 62 2」より，

△APQ $= \dfrac{1^2}{2^2} \times$ △ABC $= \dfrac{1}{4}$△ABC $= \dfrac{1}{4} \times 8 \times \dfrac{5\sqrt{3}}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

以上より，$S = \dfrac{5}{2} \times \dfrac{11\sqrt{3}}{6} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{7}{2} \times \dfrac{7\sqrt{3}}{6} \times \dfrac{1}{2} - \dfrac{5\sqrt{3}}{2} = \dfrac{11\sqrt{3}}{6}$　　答　$\mathbf{S = \dfrac{11\sqrt{3}}{6}}$