# 難 塾技 70　2 円の問題

**問題**

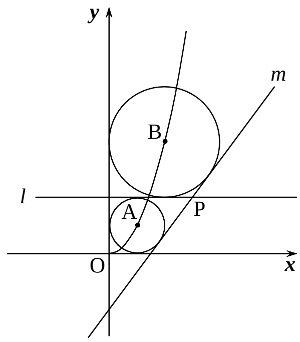
右の図で，円 A，円 B の中心は放物線 $y=\frac{1}{3}x^2(x>0)$ 上にあり，円 A は $x$ 軸，$y$ 軸および $x$ 軸に平行な直線 $l$ に接していて，円 B は直線 $l$ と $y$ 軸に接している。また，2 つの円 A，円 B に共通な接線を直線 $m$ とする。次の各問いに答えよ。

（1）円 B の中心の座標を求めよ。

（2）直線 $l$ と直線 $m$ の交点を P とするとき，P の $x$ 座標を求めよ。

（3）直線 $m$ の式を求めよ。

（4）$y$ 軸，直線 $m$ および円 A に接する円の半径を求めよ。ただし，中心の $x$ 座標，$y$ 座標はともに正とする。　　　（早稲田実業高）




---

**解**

(1) 円 A の中心を点 A とし，$x$ 座標を $a$ とすると，$A(a,\ \frac{1}{3}a^2)$ と表せる。円 A は $x$ 軸および $y$ 軸に接しているため，点 A の $x$ 座標と $y$ 座標の値は等しくなる。よって，

$a=\frac{1}{3}a^2$　　$a^2=3a$　　$a(a-3)=0$　　$a>0$ より，$a=3$

同様に，円 B の中心を点 B とし，点 B の $x$ 座標を $b$ とすると，$B(b,\ \frac{1}{3}b^2)$ と表せる。

ここで，点 B の $y$ 座標は，円 A の直径に円 B の半径 $b$ を加えた値と等しくなるので，

$\frac{1}{3}b^2=6+b$　　$(b-6)(b+3)=0$　　$b>0$ より，$b=6$　　答 **(6，12)**

(2)「塾技 70」の鉄則に従い，下の図のように中心線および，中心と接点を結び各点を決める。

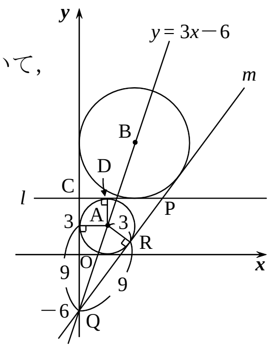
（1）より，A(3，3)，B(6，12) となるので，AB : $y=3x-6$ と求まる。

「塾技 67（1）」より，PR = PD = $x$ とおき，△CQP で三平方の定理を用いて，

$QP^2=QC^2+CP^2$

$(9+x)^2=(9+3)^2+(3+x)^2$　　これを解いて，$x=6$

よって，P の $x$ 座標は，CD + DP = 3 + 6 = **9**　答




(3)（2）より，P(9，6) を $y=ax-6$ に代入して，

$6=9a-6$　　$a=\frac{4}{3}$　　答 $\boldsymbol{y=\frac{4}{3}x-6}$

(4) 円 A に接する円を B′とし，「塾技 70」の鉄則に従い下の図のように各点を決める。

△QAS に三平方の定理を用いて，

$QA=\sqrt{9^2+3^2}=3\sqrt{10}$

求める円の半径を $r$ とすると，△QAS∽△QB′T より，

$QA : QB'=AS : B'T$

$3\sqrt{10}:(3\sqrt{10}+3+r)=3:r$

$3r(\sqrt{10}-1)=9(\sqrt{10}+1)$

$r=\frac{3(\sqrt{10}+1)}{\sqrt{10}-1}$

「塾技 42」例題の分母の有理化

$=\frac{3(\sqrt{10}+1)^2}{(\sqrt{10}-1)(\sqrt{10}+1)}=\boldsymbol{\frac{11+2\sqrt{10}}{3}}$　答