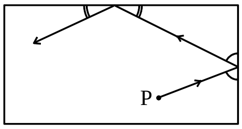
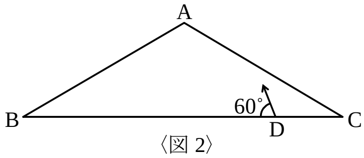
難　塾技 71　３辺比

問題

図 1 のように，平面図形の内部を直線運動する動点 P は，辺に達すると等しい角度に反射して運動を続けるものとする。



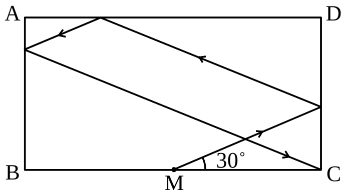
〈図 1〉



〈図 2〉

（1）図 2 は，AB = AC = 8，∠ABC = 30°である三角形の辺 BC 上の点 D から動点 P が線分 BD に対して 60°の方向に運動を開始した状況を表している。BD : DC = 7 : 1 のとき，動点 P が再び点 D に戻ってくるまでに移動した道のりを求めよ。

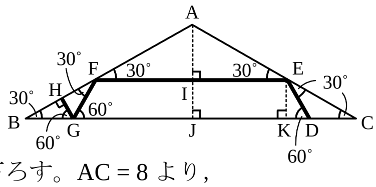
（2）図 3 は，長方形 ABCD の辺 BC の中点 M から動点 P が線分 CM に対して 30°の方向に運動を開始してから，辺 CD, DA, AB の順に反射して，頂点 C に達した状況を表している。AB = 4 であるとき，辺 BC の長さを求めよ。



〈図 3〉

（早稲田大学本庄高）

解



（1）動点 P は右の図のように，点 D から E→F→G→H→G→F→E と動いて再び点 D に戻ってくる。

ここで，A から BC に垂線を下ろし，FE および BC との交点をそれぞれ I，J とする。また，E から BC に垂線 EK を下ろす。AC = 8 より，

$AJ = 4$，$JC = 4\sqrt{3}$，$BC = 8\sqrt{3}$，$DC = \frac{1}{8}BC = \sqrt{3}$

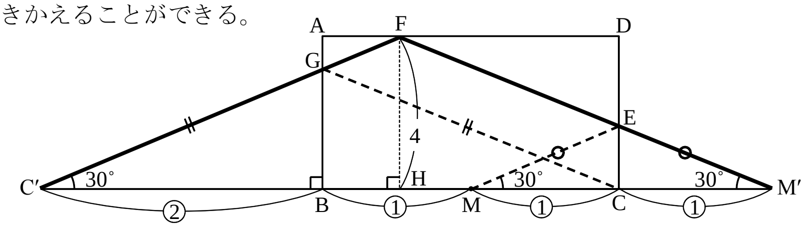
一方，$DC = DE = \sqrt{3}$ より，$EK = \frac{\sqrt{3}}{2}DE = \frac{3}{2}$，$EC = 2EK = 3$，$AE = AC - EC = 8 - 3 = 5$

さらに，AE = 5 より，$IE = IF = \frac{\sqrt{3}}{2}AE = \frac{5\sqrt{3}}{2}$，$FG = DE = \sqrt{3}$，$GH = \frac{1}{2}FG = \frac{\sqrt{3}}{2}$

以上より，求める道のりは，

$(\sqrt{3} + \frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}) \times 2 = \mathbf{15\sqrt{3}}$　答

（2）二等辺三角形を作ることで，反射経路 M→E→F→G→C を下の図のように M′→E→F→G→C′におきかえることができる。



BM = MC = ①とおくと，CM′ = CM = ①，BC′ = BC = ②とおける。

F から BC に垂線 FH を下ろすと，FH = AB = 4 より，$C'H = 4\sqrt{3}$，$C'M' = 8\sqrt{3}$

以上より，$BC = \frac{2}{5}C'M' = \mathbf{\frac{16\sqrt{3}}{5}}$　答