難 塾技 73　3 辺既知の三角形

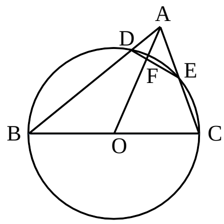
問題

図のように，BC = 12，AC = 8 の△ABC と，BC を直径とする中心 O の円がある。2 辺 AB，AC と円 O の交点をそれぞれ D，E とし，DE と OA の交点を F とする。CE = ED のとき，次の各問いに答えなさい。

（1）AE の長さを求めなさい。　（2）BD の長さを求めなさい。

（3）DF の長さを求めなさい。　（4）OA の長さを求めなさい。

（東京学芸大附高）



解

（1）△BCE と△BAE において，CE = ED より，∠CBE = ∠ABE　…①

BC は直径より，∠BEC = ∠BEA = 90°　…②　　BE は共通　…③

①，②，③より，1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいので，△BCE≡△BAE

よって，AE = CE = $\frac{1}{2}$AC = **4**　答

（2）（1）より，△BCE≡△BAE となるので，AB = BC = 12

△ABC は 3 辺既知の三角形なので，「塾技 73」の手順に従って BD を求めればよい。

CD = h，BD = x，AD = 12－x とおく。

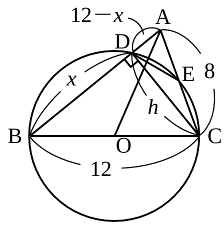
△CBD に三平方の定理を用いて，

$h^2 = 12^2 - x^2$　…①

同様に，△CAD に三平方の定理を用いて，

$h^2 = 8^2 - (12 - x)^2$　…②

①＝②より，x について解くと，$x = \mathbf{\frac{28}{3}}$　答



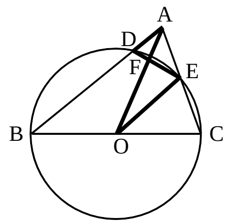
（3）E，O はそれぞれ CA，CB の中点なので，「塾技 59 **1**」より，EO∥AB

△ADF∽△OEF より，DF : EF = AD : OE

$= (12 - \frac{28}{3}) : 6$

$= 4 : 9$

一方，ED = CE = AE = 4　　よって，DF = $\frac{4}{4+9}$ × ED = $\frac{4}{13} \times 4 = \mathbf{\frac{16}{13}}$　答



（4）線分 OA と BE の交点を G とする。「塾技 58」より，

$\frac{\mathrm{BO}}{\mathrm{CB}} \times \frac{\mathrm{GA}}{\mathrm{OG}} \times \frac{\mathrm{EC}}{\mathrm{AE}} = 1$

$\frac{6}{12} \times \frac{\mathrm{GA}}{\mathrm{OG}} \times \frac{4}{4} = 1$　→　GA : OG = 2 : 1　…①

同様に，「塾技 58」より，GB : GE = 2 : 1 となるので，GE = $\frac{1}{3}$BE

BE = $\sqrt{12^2 - 4^2} = 8\sqrt{2}$ より，GE = $\frac{8\sqrt{2}}{3}$

△AEG に三平方の定理を用いて，AG = $\sqrt{\mathrm{AE}^2 + \mathrm{GE}^2} = \frac{4\sqrt{17}}{3}$

①より，OA = $\frac{3}{2}$AG = $\mathbf{2\sqrt{17}}$　答