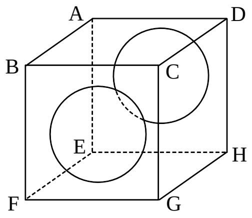
難 塾技 76　空間内の線分の長さ

問題

右の図のように，半径の等しい 2 つの球がたがいに外接し，1 辺の長さが 8cm の立方体の異なる 3 面にそれぞれ接している。次の問いに答えよ。

（1）対角線 DF の長さを求めよ。

（2）球の半径を求めよ。　　（東京電機大学高校）



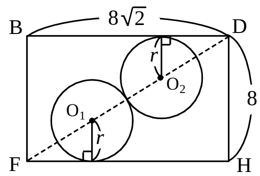
解

（1）「塾技 76（2）」より，

$$\mathrm{DF} = \sqrt{8^2+8^2+8^2} = \mathbf{8\sqrt{3}\,(cm)}$$ 答

※1 辺 a の立方体の対角線 $=\sqrt{a^2+a^2+a^2}$
$=\sqrt{3}a$
と表すことができる。

（2）「塾技 76（1）」より，求めたい線分である球の半径を含む平面 BFHD を切り出すと，切断面は右の図のようになる。

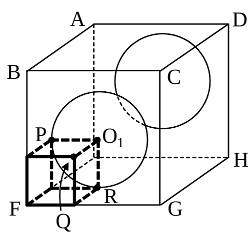


求める半径を r とすると，

$$\mathrm{DF} = \mathrm{FO_1} + 2r + \mathrm{DO_2} = 8\sqrt{3} \quad \cdots ①$$

よって，$\mathrm{FO_1}\ (=\mathrm{DO_2})$の長さを r を用いて表すことができればよい。

ここで，球 $\mathrm{O_1}$ と面 ABFE との接点を P，面 BFGC との接点を Q，面 EFGH との接点を R とすると，右の図より，4 点 $\mathrm{O_1}$，P，Q，R 及び F は，1 辺が球の半径 r と等しい立方体の頂点となることがわかる。



すなわち，$\mathrm{FO_1}$ は，1 辺が r の立方体の対角線となるので，

$$\mathrm{FO_1} = \sqrt{r^2+r^2+r^2} = \sqrt{3}r$$

①より，$\sqrt{3}r + 2r + \sqrt{3}r = 8\sqrt{3}$

$$2r(\sqrt{3}+1) = 8\sqrt{3}$$

$$r = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$$

「塾技 42」例題の分母の有理化

$$= \frac{12-4\sqrt{3}}{3-1}$$

$$= \mathbf{(6-2\sqrt{3})\,cm}$$ 答