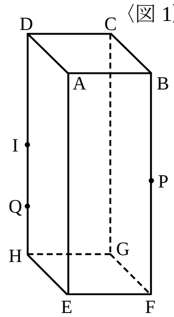
難 塾技 78　最短距離

問題

右の図 1 に示した立体 ABCD−EFGH は，AB = AD = 3cm，AE = 8cm の直方体である。辺 DH の中点を I とする。点 P は頂点 F を出発し，毎秒 2cm の速さで辺 FB，辺 BA 上を F，B，A の順に頂点 F から頂点 A まで動き，$\frac{11}{2}$ 秒後に頂点 A に到着し，止まる。点 Q は，点 P が頂点 F を出発するのと同時に頂点 H を出発し，毎秒 1cm の速さで辺 HD 上を頂点 H から点 I まで動き，4 秒後に点 I に到着し，止まる。次の各問いに答えよ。

〈図 1〉



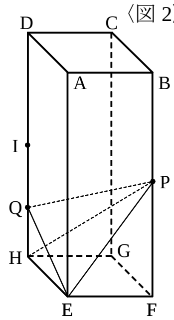
［問 1］右の図 2 は，図 1 において頂点 E と点 P，頂点 E と点 Q，頂点 H と点 P，点 P と点 Q をそれぞれ結んだ場合を表している。点 P が頂点 F を出発してから x 秒後の立体 P−EQH の体積を $y$cm^3 とする。

このとき，次の（1），（2）に答えよ。

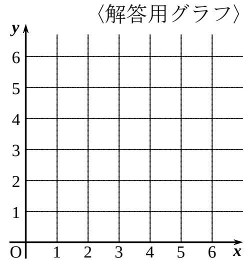
（1）x の変域を $0 \leqq x \leqq 4$ と $4 \leqq x \leqq \frac{11}{2}$ の場合に分けて，y を x の式で表し，そのグラフをかけ。ただし，$x = 0$ と $x = \frac{11}{2}$ のときの y の値を 0 と考える。

（2）点 P が頂点 F を出発してから a 秒後の立体 P−EQH の体積を Vcm^3，点 P が頂点 F を出発してから $a + 3$ 秒後の立体 P−EQH の体積を V'cm^3 とする。V'が V の$\frac{2}{3}$倍となるとき，a の値を求めよ。ただし，$0 < a < 4$ とする。

〈図 2〉



〈解答用グラフ〉

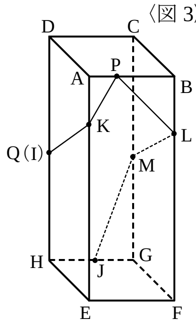


［問 2］右の図 3 は，図 1 において，点 P が辺 AB 上にあり，点 Q が点 I と一致するとき，辺 AE 上にある点を K，辺 BF 上にある点を L，辺 CG 上にある点を M，辺 GH の中点を J とし，点 Q と点 K，点 K と点 P，点 P と点 L，点 L と点 M，点 M と点 J をそれぞれ結んだ場合を表している。

QK + KP + PL + LM + MJ = $l$cm とする。l の値が最も小さくなるときの点 P は，頂点 F を出発してから何秒後か。ただし，解答欄には，答えだけでなく，答えを求める過程がわかるように，途中の式や計算なども書け。

（都立戸山高校）

〈図 3〉



解答は次のページ

解

［問 1］（1）$0 \leqq x \leqq 4$ の場合

下の図Ⅰより，

$$y = 3 \times x \times \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{1}{3}$$

$$\boldsymbol{y = \frac{3}{2}x}$$ 答

$4 \leqq x \leqq \dfrac{11}{2}$ の場合

$AP = (8 + 3) - 2x$

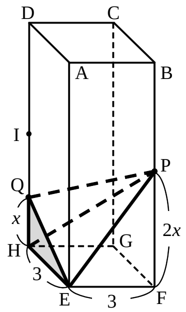
$= 11 - 2x$

下の図Ⅱより，

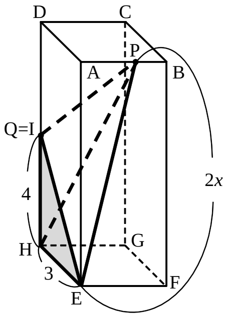
$$y = 4 \times 3 \times \frac{1}{2} \times (11 - 2x) \times \frac{1}{3}$$

$$\boldsymbol{y = -4x + 22}$$ 答

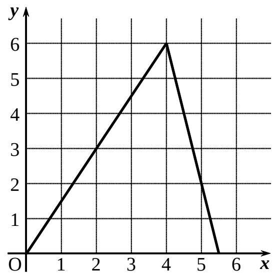
(グラフ) 答



〈図Ⅰ〉



〈図Ⅱ〉



（2）$V = 3 \times a \times \dfrac{1}{2} \times 3 \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{3}{2}a$ （$0 < a < 4$ より，（1）の $y = \dfrac{3}{2}x$ の x を a にしてもよい）

$V' = -4(a+3) + 22$ ← $a+3$ 秒後 V' が V より小さくなるのは，（1）のグラフより，$4 < a+3 < \dfrac{11}{2}$ のとき

$V' = \dfrac{2}{3}V$ より，$-4(a+3) + 22 = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{3}{2}a$　　これを解いて，$\boldsymbol{a = 2}$ 答

［問 2］

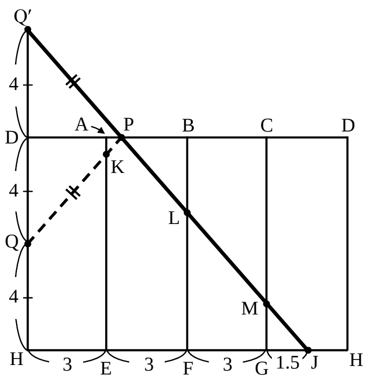
「塾技 78」より，l の値が最も小さくなるのは，直線となるときである。ここで，「塾技 30」を応用し，右の図のように，点 D に関して点 Q と対称な点 Q′をとる。すると，

QK + KP + PL + LM + MJ

= Q′P + PL + LM + MJ

= Q′J

と l は一直線となり最短となる。



△Q′DP∽△Q′HJ より，

Q′D：Q′H = DP：HJ

4：12 = DP：10.5　　これを解いて，$DP = \dfrac{7}{2}$

よって，$BP = DB - DP = 6 - \dfrac{7}{2} = \dfrac{5}{2}$ となる。以上より，

P が進んだ道のり $= FB + BP = 8 + \dfrac{5}{2} = \dfrac{21}{2}$

求める時間 $= \dfrac{21}{2} \div 2 = \boldsymbol{\dfrac{21}{4}}$ **(秒後)** 答