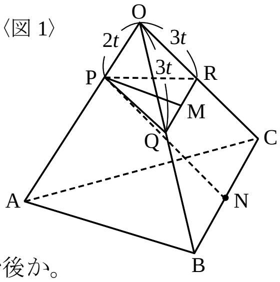
難 塾技 80　正多面体（1）

問題

図 1 のような 1 辺の長さが 12 の正四面体 OABC がある。3 点 P，Q，R は同時に点 O を出発して，点 P は OA 上を秒速 2 で，点 Q は OB 上を秒速 3 で，点 R は OC 上を秒速 3 で，それぞれの辺上を一定の速さで進む。このとき，次の問いに答えよ。

〈図 1〉



（1）△PQR の 3 辺の長さの和が $\frac{4}{3}\sqrt{7}+2$ となるのは何秒後か。

（2）四面体 OPQR の体積が正四面体 OABC の体積の $\frac{2}{81}$ になるのは何秒後か。

（3）2 秒後の P，Q，R において，QR の中点を M，BC の中点を N とする。

① PN の長さを求めよ。

② BC を軸として，線分 PM を回転したときにできる図形の面積を求めよ。　（海城高）

解答は次のページ

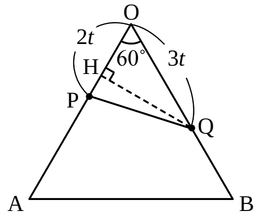
解

(1) $OQ = OR = 3t$，$\angle QOR = 60^\circ$ より，$\triangle OQR$ は正三角形となるので，$QR = 3t$

一方，$\triangle OPQ \equiv \triangle OPR$ より，$PQ = PR$

右の図のように，Q から OP に垂線 QH を下ろすと，

$$OH = \frac{1}{2}OQ = \frac{3}{2}t \qquad QH = \sqrt{3}OH = \frac{3\sqrt{3}}{2}t$$



$\triangle PQH$ に三平方の定理を用いて，

$$PQ = \sqrt{PH^2 + QH^2} = \sqrt{(2t - \frac{3}{2}t)^2 + (\frac{3\sqrt{3}}{2}t)^2}$$
$$= \sqrt{7t^2} = \sqrt{7}t$$

$\triangle PQR$ の 3 辺の長さの和について立式して，

$$\sqrt{7}t + \sqrt{7}t + 3t = \frac{4}{3}\sqrt{7} + 2$$
$$(2\sqrt{7} + 3)t = \frac{4\sqrt{7} + 6}{3}$$
$$t = \frac{2(2\sqrt{7} + 3)}{3(2\sqrt{7} + 3)} = \frac{2}{3}$$

答　$\mathbf{\frac{2}{3}}$ **秒後**

(2)「塾技 85」より，

$$[\text{四面体OPQR}] = [\text{正四面体OABC}] \times \frac{2t}{12} \times \frac{3t}{12} \times \frac{3t}{12}$$
$$= [\text{正四面体OABC}] \times \frac{t^3}{96}$$

題意より，$\dfrac{t^3}{96} = \dfrac{2}{81}$ を解けばよい。

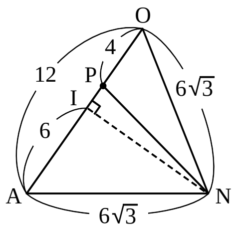
$$\frac{t^3}{96} = \frac{2}{81} \xrightarrow{\text{両辺を 96 倍}} t^3 = \frac{2 \times 96}{81} = \frac{64}{27} = \frac{4^3}{3^3} = (\frac{4}{3})^3$$

よって，$t = \mathbf{\frac{4}{3}}$ **(秒後)**　答

(3) ①「塾技 76（1）」より，求めたい線分 PN を含む平面である $\triangle OAN$ を抜き出して考える。

右の図のように，$\triangle OAN$ は，$ON = AN = 6\sqrt{3}$ の二等辺三角形となる。N から OA に垂線 NI を下ろし，$\triangle ONI$ に三平方の定理を用いると，

$$NI = \sqrt{ON^2 - OI^2} = \sqrt{(6\sqrt{3})^2 - 6^2} = 6\sqrt{2}$$

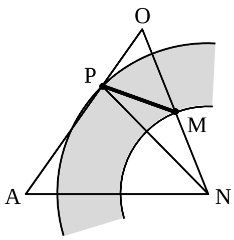


求める PN の長さは，$\triangle PIN$ に三平方の定理を用いて，

$$PN = \sqrt{PI^2 + NI^2} = \sqrt{2^2 + (6\sqrt{2})^2} = \mathbf{2\sqrt{19}}$$　答

② 求める図形の面積は，PN を半径とする円の面積から，MN を半径とする円の面積を引けばよい。

$t = 2$ のとき，Q，R はそれぞれ OB，OC の中点となるので，M は ON の中点となる。



①の図より，$MN = 3\sqrt{3}$ とわかるので，求める面積は，

$$\pi(2\sqrt{19})^2 - \pi(3\sqrt{3})^2 = 76\pi - 27\pi = \mathbf{49\pi}$$　答