難 塾技 82　正多面体（3）

問題

ある多面体において，1 つの頂点 O に対し，この頂点に集まる辺 OA，OB，OC，････の中点がすべて同一平面上にある場合を考える。この平面で多面体を切り，頂点 O を含む角錐を取り去る操作を「頂点 O の角（かど）を切り落とす」と呼ぶことにする。さらに，多面体のすべての頂点に対し，同時に角を切り落とすことができるとき，この操作を「多面体の角を切り落とす」と呼ぶことにする。

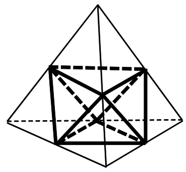
（1）正四面体の角を切り落としたときにできる多面体の名称を答えよ。

（2）立方体の角を切り落としたときにできる多面体において，ある 1 つの辺とねじれの位置にある辺の本数を求めよ。

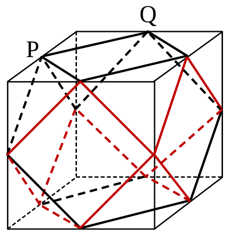
（3）（2）でできた多面体は再び角を切り落とすことができる。（2）でできた多面体の角を切り落としたときにできる立体の体積を求めよ。ただし，もとの立方体の 1 辺の長さを 6 とする。

（開成高）

解



（1）正四面体の角から 4 つの合同な三角錐を切り落とすことになり，これは「塾技 82」の正四面体の各辺の中点を結ぶことと同じことである。
「塾技 82」より，右の図のような正八面体ができる。　答 **正八面体**



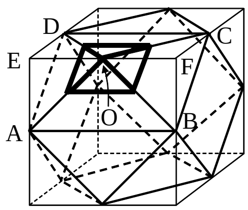
（2）立方体の角を切り落とすと，右の図のような正三角形および正方形に囲まれた立体ができる。この立体のすべての辺の数は正方形 6 面分と同じ $4\times6=24$ 本。ここで，右の辺 PQ に着目して考える。ねじれの位置とは，同一平面上にない 2 直線の位置関係なので，辺 PQ と平行な辺や，辺 PQ を含む正方形，正三角形，正六角形上の辺以外の合計 12 本（図の赤線）ある。

答 **12 本**

（3）まず（2）の立体の体積は，立方体から角の 8 個の三角錐を引いて，

$$6^3-3\times3\times\frac{1}{2}\times3\times\frac{1}{3}\times8=180$$

さらに，右の太線の四角錐 12 個分を引けばよい。
ここで，太線の四角錐は，四角錐 O−ABCD と相似であり，相似比 1：2 より，体積比 1：8。四角錐 O−ABCD の体積は，四角柱 ADE−BCF から三角錐 O−ADE および三角錐 O−BCF を引けばよいので，



$$[\text{四角錐O}-\text{ABCD}]=3\times3\times\frac{1}{2}\times6-3\times3\times\frac{1}{2}\times3\times\frac{1}{3}\times2$$
$$=18$$

以上より，求める立体の体積は，$180-18\times\frac{1}{8}\times12=\mathbf{153}$　答