難 塾技 83　立体の切断（1）

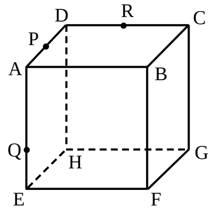
問題

図のように，1 辺の長さが 12 の立方体 ABCD−EFGH がある。
辺 AD の中点を P，辺 AE を 2 : 1 の比に分ける点を Q，辺 DC の中点を R とする。この立方体を P，Q，R を通る平面で 2 つに切るとき，次の問いに答えなさい。

(1) 切り口の周の長さを求めなさい。

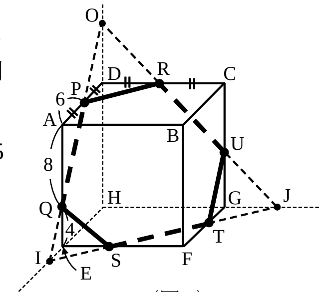
(2) 2 つに切った立体のうち，B を含む立体の体積を求めなさい。

(3) 点 H から切り口に下ろした垂線の長さを求めなさい。



（海城高）

解



〈図 1〉

(1)「塾技 83」の法則を利用して切断面を考えると，切り口は図 1 のような六角形となることがわかる。図のように各点をとると，求める周は六角形 PQSTUR の周である。△DPR は直角二等辺三角形より，

$PR=\sqrt{2}DP=6\sqrt{2}$　一方，AP = 6，AQ = 8 より，△APQ は 3 : 4 : 5 の直角三角形となるので，PQ = 10

ここで，△OPD≡△QPA となるので，OD = QA = 8

DR = 6 より，△ODR も 3 : 4 : 5 の直角三角形となる。

△ODR∽△OHJ∽△QES より，ES = 3，QS = 5

また，PR // ST より，△FST は△DPR と同様に直角二等辺三角形となる。

よって，$ST=\sqrt{2}FS=\sqrt{2}\times(12-3)=9\sqrt{2}$

以上より，$PR+PQ+QS+ST+TU+UR=6\sqrt{2}+10+5+9\sqrt{2}+5+10=\mathbf{15\sqrt{2}+30}$ 答

(2) 求める立体の体積は，立方体から頂点 H を含む立体の体積を引けばよい。

一方，頂点 H を含む立体の体積は，三角錐 O−HIJ から 3 つの三角錐を引けばよい。

図 1 で，△FST∽△ESI となるので，△ESI は直角二等辺三角形となり，EI = ES = 3

$$\text{頂点 H を含む立体の体積}=15\times15\times\frac{1}{2}\times20\times\frac{1}{3}-6\times6\times\frac{1}{2}\times8\times\frac{1}{3}-3\times3\times\frac{1}{2}\times4\times\frac{1}{3}\times2$$
$$=750-48-12=690$$

よって，(B を含む立体の体積) = $12^3-690=\mathbf{1038}$ 答

(3)「塾技 77」より，三角錐 OHIJ の体積を，△HIJ を底面とする三角錐 O−HIJ と，△OIJ を底面とする三角錐 H−OIJ の 2 通りで表せばよい。(2) より，三角錐 O−HIJ の体積は，750

一方，図 1 より，△OPD∽△OIH となり，△OIH は 3 : 4 : 5 とわかるので，

$$OI=\frac{5}{4}OH=\frac{5}{4}\times20=25$$

また，図 1 で△DPR∽△HIJ より，△HIJ は直角二等辺三角形となり，$IJ=\sqrt{2}IH=15\sqrt{2}$

O から，IJ に垂線 OM を下ろし，△OIM に三平方の定理を用いると，

$$OM=\sqrt{OI^2-IM^2}=\sqrt{25^2-\left(\frac{15\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{5\sqrt{82}}{2}$$

以上より，求める垂線の長さを h とすると，

$$15\sqrt{2}\times\frac{5\sqrt{82}}{2}\times\frac{1}{2}\times h\times\frac{1}{3}=750$$　これを解いて，$h=\mathbf{\frac{60\sqrt{41}}{41}}$ 答