難 塾技 84　立体の切断（2）

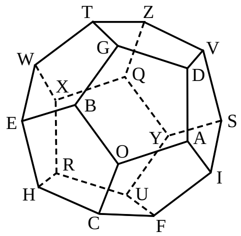
問題

図のような 1 辺の長さが 1 の正十二面体がある。

（1） ∠CBD，∠CBG の大きさをそれぞれ求めよ。（答えのみでよい。）

（2） 正十二面体の頂点のうちから 8 点を選び，それらを頂点とする立方体をつくることができる。その立方体の体積は，正十二面体の体積の何倍か。ただし，線分 AB の長さを x とすると，$x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ である。

（開成高）

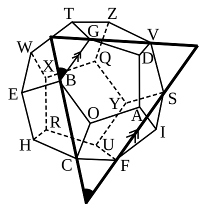


解

（1） 断面 BCID は正方形となるので，$\angle \mathbf{CBD}=\mathbf{90^\circ}$ 答

右の図のように，3 直線 BC，FS，GV により正三角形ができる。

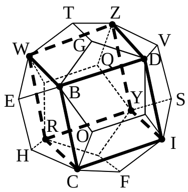
BG // FS より，$\angle \mathbf{CBG}=180-60=\mathbf{120^\circ}$ 答



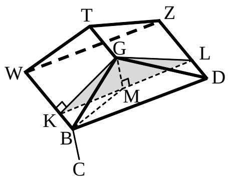
（2） 右の図 1 のように，頂点 B，D，Z，W，C，I，Y，R をそれぞれ結ぶと，1 辺が $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$（★1）の立方体を作ることができる。正二十面体の体積は，立方体の体積に図 2 の五面体の体積を 6 個分加えたものとなる。

図 2 の五面体の体積は，「塾技 84 **2**」を応用して(★2)，

$$\text{五面体の体積}=\triangle \mathrm{GKL}\times\frac{\mathrm{WB}+\mathrm{TG}+\mathrm{ZD}}{3}$$



〈図 1〉



〈図 2〉

ここで，（1）より $\angle\mathrm{CBG}=120^\circ$ となり，$\angle\mathrm{CBM}=90^\circ$ より，$\angle\mathrm{GBM}=30^\circ$ となる。

よって，△GBM は，30°，60°，90° の直角三角形となるので，$\mathrm{GM}=\dfrac{1}{2}\mathrm{GB}=\dfrac{1}{2}$

以上より，立方体の体積 $=\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3=\dfrac{(1+\sqrt{5})^3}{8}=\dfrac{(1+\sqrt{5})^2(1+\sqrt{5})}{8}=\dfrac{16+8\sqrt{5}}{8}=2+\sqrt{5}$

$$\text{正十二面体の体積}=\underbrace{(2+\sqrt{5})}_{\text{立方体}}+\underbrace{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}_{\triangle\mathrm{GKL}}\times\frac{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}+1+\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}{3}\times 6$$

$$=2+\sqrt{5}+\frac{1+\sqrt{5}}{8}\times\frac{2+\sqrt{5}}{3}\times 6$$

$$=2+\sqrt{5}+\frac{(1+\sqrt{5})(2+\sqrt{5})}{4}=\frac{15+7\sqrt{5}}{4}$$

よって求める体積比は，$(2+\sqrt{5})\div\dfrac{15+7\sqrt{5}}{4}=\dfrac{4(2+\sqrt{5})}{15+7\sqrt{5}}=\dfrac{4(2+\sqrt{5})(15-7\sqrt{5})}{(15+7\sqrt{5})(15-7\sqrt{5})}=\mathbf{\dfrac{5-\sqrt{5}}{5}}$ **(倍)** 答

★1 正五角形の 1 辺の長さを 1 とすると，正五角形の 1 辺と対角線の比は $1:\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ となり，この比のことを黄金比という。

★2 右の図の立体 EF−ABCD は，三角柱を切断したもので，体積 $=S\times\dfrac{\mathrm{AB}+\mathrm{EF}+\mathrm{CD}}{3}$ と表すことができる。