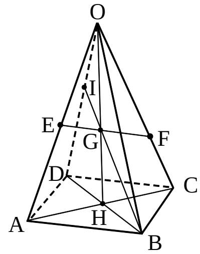
難 塾技 85　立体の切断（3）

問題



図のように，正四角錐 OABCD がある。底面 ABCD は 1 辺の長さが 1cm の正方形で，他の辺の長さはすべて 2cm である。辺 OA の中点を E，辺 OC 上で OF : FC = 2 : 1 となる点を F，底面 ABCD の対角線の交点を H とする。また，線分 OH と線分 EF の交点を G，直線 BG と辺 OD の交点を I とする。このとき，次の各問いに答えなさい。

(1) 三角形 OEF の面積を求めなさい。

(2) 線分 OG の長さを求めなさい。

(3) OI : OD を求めなさい。

(4) 四面体 OEFI の体積を求めなさい。　　　　（東京学芸大附高）

解

(1) $AH=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ より，△OAH に三平方の定理を用いて，

$$OH=\sqrt{OA^2-AH^2}=\sqrt{2^2-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$$

「塾技 62 **1**」より，$\triangle OEF=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\times\triangle OAC=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\times\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{14}}{2}\times\dfrac{1}{2}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{7}}{6}}$ **(cm²)** 答

(2) 線分 EF の延長線と線分 AC の延長線との交点を P として，「塾技 58」を用いる。

図 1 より，$\dfrac{PC}{AP}\times\dfrac{FO}{CF}\times\dfrac{EA}{OE}=1$

$\dfrac{PC}{AP}\times\dfrac{2}{1}\times\dfrac{1}{1}=1$

$\dfrac{2}{1}\times\dfrac{PC}{AP}=1$

→　AP : PC = 2 : 1

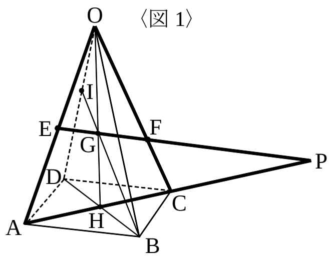
図 2 より，$\dfrac{PC}{HP}\times\dfrac{FO}{CF}\times\dfrac{GH}{OG}=1$

$\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{1}\times\dfrac{GH}{OG}=1$

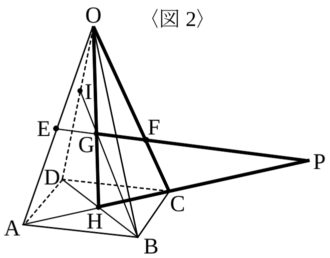
$\dfrac{4}{3}\times\dfrac{GH}{OG}=1$

→　OG : GH = 4 : 3

よって，$OG=OH\times\dfrac{4}{3+4}=OH\times\dfrac{4}{7}=\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{14}}{7}}$ **(cm)** 答



〈図 1〉



〈図 2〉

(3) 図 3 より，

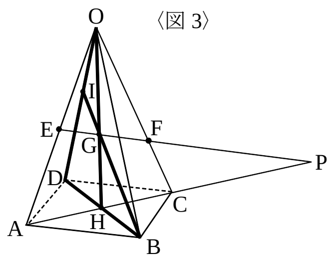
$\dfrac{BH}{DB}\times\dfrac{GO}{HG}\times\dfrac{ID}{OI}=1$

$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{3}\times\dfrac{ID}{OI}=1$

$\dfrac{2}{3}\times\dfrac{ID}{OI}=1$

よって，OI : ID = 2 : 3 より，

OI : OD = 2 : 5 答



〈図 3〉

(4)「塾技 85」より，

$$[\text{四面体OEFI}]=[\text{三角錐O}-\text{ACD}]\times\dfrac{OI}{OD}\times\dfrac{OE}{OA}\times\dfrac{OF}{OC}$$

$$=\left(1\times1\times\dfrac{\sqrt{14}}{2}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\right)\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}$$

$$=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{14}}{90}}\ \textbf{(cm}^3\textbf{)}$$ 答