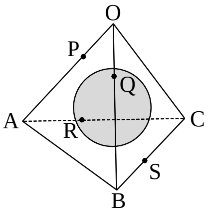
難　塾技 89　内接球（2）

問題

右の図のように，1 辺が 6cm の正四面体 OABC の 4 つの面に球が接している。このとき，次の各問いに答えよ。

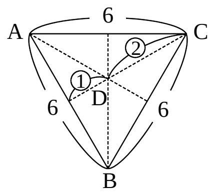


（1）底面 ABC と球の接する点を D とするとき，線分 CD の長さを求めよ。

（2）球の半径を求めよ。

（3）4 つの辺 OA，OB，AC，BC 上にそれぞれ OP = OQ = AR = BS = 2cm となる点 P，Q，R，S をとる。四角形 PQSR をふくむ平面で球を切ったとき，球の断面積を求めよ。ただし，円周率は π とする。（早稲田実業高）

解



（1）点 D は，正四面体の頂点 O から底面に下ろした垂線の足と一致し，「塾技 80 例題」より，底面の正三角形 ABC の重心と一致する。

よって，「塾技 59 **3**（1）」より，　$CD = 3\sqrt{3} \times \frac{2}{3} = \mathbf{2\sqrt{3}(cm)}$　答

（2）「塾技 80（2）」および「塾技 72 **1**」より，

正四面体の体積 $= \frac{\sqrt{2}}{12} \times 6^3 = 18\sqrt{2}$　　表面積 $= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 6^2 \times 4 = 36\sqrt{3}$

求める球の半径を r とすると，「塾技 89」より，

$\frac{r}{3} \times 36\sqrt{3} = 18\sqrt{2}$　　これを解いて，$r = \mathbf{\frac{\sqrt{6}}{2}(cm)}$　答

（3）AB の中点を M，PQ の中点を N とすると，図 1 より，ON : NM = MD : DC = 1 : 2

よって，四角形 PQSR をふくむ平面で球を切断したとき，点 D は RS 上にあることがわかる。

球の中心を I，面 OAB との接点を E とし，I，D，E を通る平面で切り出すと，図 2 のようになる。

I から線分 ND に垂線 IH を引くと，H が求める球の断面の円の中心となるので，求める円の半径は DH となる。N から OD に垂線 NJ を引くと，△DHI∽△DJN より，DI : DN = DH : DJ

「塾技 80（1）」より，$OD = \frac{\sqrt{6}}{3} \times 6 = 2\sqrt{6}$，$DJ = \frac{2}{3} \times OD = \frac{2}{3} \times 2\sqrt{6} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$　　$NJ = \frac{1}{3}MD = \frac{\sqrt{3}}{3}$

一方，$DN = \sqrt{(NJ)^2 + (DJ)^2} = \sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{3})^2 + (\frac{4\sqrt{6}}{3})^2} = \sqrt{11}$

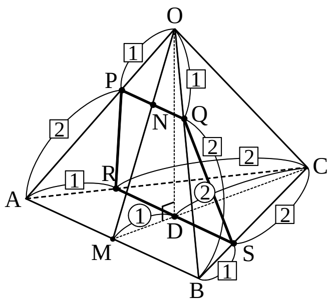
よって，DI : DN = DH : DJ

$$\frac{\sqrt{6}}{2} : \sqrt{11} = DH : \frac{4\sqrt{6}}{3}$$

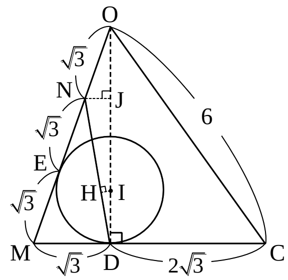
$$DH = \frac{4}{\sqrt{11}}$$

求める断面積は，

$\pi(\frac{4}{\sqrt{11}})^2 = \mathbf{\frac{16}{11}\pi\ (cm^2)}$　答



〈図 1〉



〈図 2〉