難　塾技 91　内接球（4）

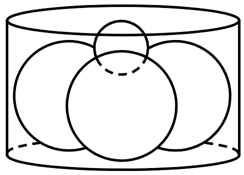
問題

右の図のように，円柱の中で，半径 2cm の球 3 個と半径 1cm の球 1 個が互いに接している。さらに，半径 2ｃｍの球は円柱の底面および側面と接しており，半径 1cm の球は円柱の上面と接している。

このとき，次の問いに答えなさい。ただし，円周率は π とする。

（1）円柱の底面積を求めなさい。

（2）円柱の高さを求めなさい。



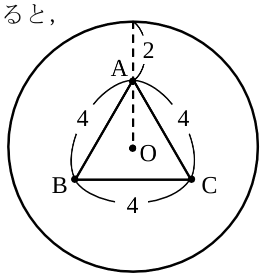
（大阪教育大附高池田）

解

（1）半径 2cm の 3 個の球の中心をそれぞれ A，B，C とする。3 点 A，B，C を通る平面でこの円柱を切断すると，切断面は右の図のような円となる。円の中心を O とすると，求める面積は，円 O の面積と一致する。「塾技 59 3 」より，

$$AO=2\sqrt{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}\text{(cm)}$$

よって，円 O の半径は，$\left(2+\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$cm とわかるので，



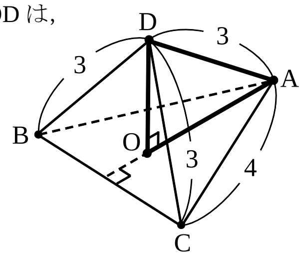
$$\text{求める面積}=\pi\left(2+\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

$$=\pi\left(4+\frac{16\sqrt{3}}{3}+\frac{48}{9}\right)$$

$$=\frac{\overset{16}{\cancel{48}}\sqrt{3}+\overset{28}{\cancel{84}}}{\underset{3}{\cancel{9}}}\pi=\frac{16\sqrt{3}+28}{3}\pi$$

答　$\boldsymbol{\frac{16\sqrt{3}+28}{3}\pi}$ **cm²**

（2）「塾技 91（3）」の図で，正四面体を正三角錐に，上側の r を 1cm，下側の 3 本の r を 2cm と考えればよい。半径 1cm の球の中心を D とすると，正三角錐の高さ OD は，



$$OD=\sqrt{DA^2-AO^2}$$

$$=\sqrt{3^2-\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{33}}{3}\text{(cm)}$$

以上より，求める円柱の高さは，

$$2+\frac{\sqrt{33}}{3}+1=\frac{9+\sqrt{33}}{3}\text{(cm)}$$

答　$\boldsymbol{\frac{9+\sqrt{33}}{3}}$ **cm**