難 塾技 92　外接球

問題

高さ 6 の円錐の頂点を A，底面の中心を O とする。また，底面の周を円 O とする。

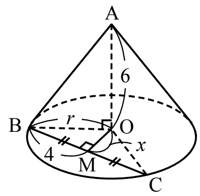
(1) 円 O の弦 BC の長さが 8 であるとき，三角形 ABC を直線 AO のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

(2) 円 O の半径が r のとき，円錐に外接する球の半径 R を r の式で表せ。

(3) $\angle D = 15^\circ$，BC = 8 の三角形 BCD が円 O に内接しているとき，三角錐 ABCD に外接する球の半径を求めよ。

（開成高）

解



(1) 右の図のように O から弦 BC に垂線 OM を引くと，

OM は弦 BC の垂直二等分線となるので，BM = CM = 4 となる。

底面の円 O の半径を r，OM = x とすると，求める立体の体積は，

半径 r，高さ 6 の円錐から，半径 x，高さ 6 の円錐を引いたものとなるので，

$$\text{体積} = \pi r^2 \times 6 \times \frac{1}{3} - \pi x^2 \times 6 \times \frac{1}{3}$$

$$= (r^2 - x^2)\pi \times 6 \times \frac{1}{3} \quad \cdots ①$$

ここで，△OBM に三平方の定理を用いると，

$x^2 + 4^2 = r^2$ より，$r^2 - x^2 = 16$　…②

②を①に代入して，① $= 16\pi \times 6 \times \dfrac{1}{3} = \mathbf{32\pi}$　答

(2) 外接球の中心を O′とする。「塾技 92 **2**」より，図 1 の△APQ を切り出して考える。

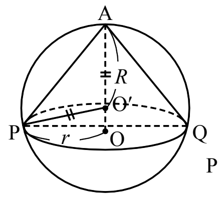
図 2 の△O′PO に三平方の定理を用いて，

$$\mathrm{O'P}^2 = \mathrm{O'O}^2 + \mathrm{PO}^2$$

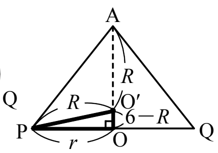
$$R^2 = (6 - R)^2 + r^2$$

$$R^2 = 36 - 12R + R^2 + r^2$$

$$\boldsymbol{R = \frac{r^2 + 36}{12}}$$　答



〈図 1〉



〈図 2〉

(3) 図 3 より，$\angle D = 15^\circ$なので，$\angle BOC = 30^\circ$とわかる。

求める外接球の半径は，(2) の R の式に円 O の半径

OB の値を代入すればよい。ここで図 4 のように，

O から BC に垂線 OH を下ろすと，△OBH は 15°，75°，90°

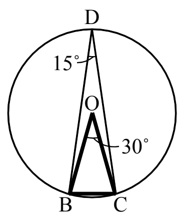
の直角三角形となるので，「塾技 71 **3**」より，

$$\mathrm{OB} : \mathrm{BH} = 4 : \sqrt{6} - \sqrt{2}$$

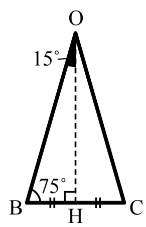
$$\mathrm{OB} : 4 = 4 : \sqrt{6} - \sqrt{2}$$

$$\mathrm{OB} = \frac{16}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{16(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{(\sqrt{6} - \sqrt{2})(\sqrt{6} + \sqrt{2})} = 4(\sqrt{6} + \sqrt{2})$$

よって，求める半径 $= \dfrac{\left\{4(\sqrt{6} + \sqrt{2})\right\}^2 + 36}{12} = \boldsymbol{\dfrac{41 + 16\sqrt{3}}{3}}$　答



〈図 3〉



〈図 4〉