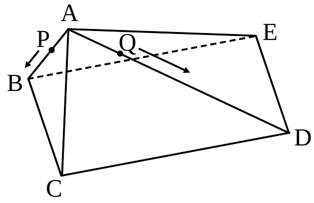
難　塾技 93　動点

問題

右の図に示した立体 A−BCDE は，BC = 12cm，CD = $12\sqrt{3}$ cmの長方形BCDE を底面とする四角錐である。△ABC は正三角形であり，∠ABE = ∠ACD = 90°である。点 P は頂点 A を出発し，△ABC の辺上を頂点 B，C，A，B，C，A，…の順に通り，4cm/秒の速さで動き続ける。点 Q は点 P と同時に頂点 A を出発し，△ADE の辺上を頂点 D，E，A，D，E，A，…の順に通り，5cm/秒の速さで動き続ける。2 点 P，Q が頂点 A を同時に出発してからの時間を x 秒とする。次の各問に答えよ。



(1) 2 点 P，Q が頂点 A を同時に出発してから，初めて 2 点 P，Q が頂点 A で出会うときの x の値を求めよ。

(2) $3 < x < 6$ のとき，点 P と点 Q を結んだ場合を考える。線分 PQ が線分 BE と平行になるときの x の値を求めよ。

(3) $x = 9$ のとき，辺 AD の中点を L，辺 BC の中点を M とし，点 P と点 Q，点 P と点 L，点 P と点 M，点 Q と点 L，点 Q と点 M，点 L と点 M をそれぞれ結んだ場合を考える。立体 PQLM の体積は何 cm^3 か。ただし，解答欄には答えだけでなく，答えを求める過程が分かるように，途中の式や計算なども書け。

（都立日比谷高）

解

(1) △ABC の周 = 36 より，点 P は 36 ÷ 4 = 9 秒毎に頂点 A を通過する。

一方，辺 AD の長さは，△ACD に三平方の定理を用いて，

$$AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{12^2 + (12\sqrt{3})^2} = \sqrt{576} = 24$$

△ADE の周 = 24 × 2 + 12 = 60 より，点 Q は 60 ÷ 5 = 12 秒毎に頂点 A を通過する。

以上より，2 点 P，Q が頂点 A で初めて出会うのは，9 と 12 の最小公倍数 36 秒後とわかる。

答　$\boldsymbol{x = 36}$

(2) P は x 秒間で $4x$cm，Q は x 秒間で $5x$cm 進む。

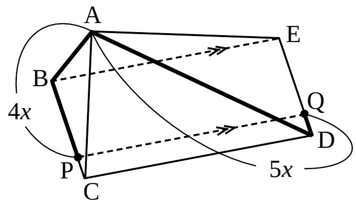
$3 < x < 6$ のとき，P は辺 BC 上，Q は辺 DE 上にあるので，

右の図より，PC = QD となるとき，PQ // BE となる。

$PC = AB + BC - 4x = 24 - 4x$

$QD = 5x - AD = 5x - 24$

よって，$24 - 4x = 5x - 24$　　これを解いて，$\boldsymbol{x = \frac{16}{3}}$　答



(3) $x = 9$ のとき，点 P は頂点 A 上，点 Q は辺 AE 上の E から A にむかって 9cm のところにある。「塾技 85」より，

$$[\text{三角錐}P-QLM] = [\text{三角錐}P-EDM] \times \frac{PL}{PD} \times \frac{PQ}{PE} \times \frac{AM}{AM}$$

$$= \underbrace{12 \times 12\sqrt{3}}_{\text{長方形 BCDE}} \times \frac{1}{2} \times \underbrace{6\sqrt{3}}_{AM} \times \frac{1}{3} \times \frac{12}{24} \times \frac{15}{24} \times \frac{1}{1}$$

$$= \boldsymbol{135(\text{cm}^3)}$$ 答