

難 塾技 96 約数の個数・総和

問題 1

正の約数の個数が 21 個となる自然数 n のうち、最小の n を求めよ。

(慶應志木高)

問題 2

正の整数 n の約数は 4 個であり、それら 4 個の約数の和は 84 である。正の整数 n を求めよ。

(慶應女子高)

解 1

「塾技 96 1」より、正の約数の個数が 21 個となる自然数を素因数分解したときの形は、

$$(i) a^{20} \rightarrow \text{約数の個数} = (20 + 1) = 21 \text{ 個} \quad (a, b, c \text{ はそれぞれ素数})$$

$$(ii) b^2 c^6 \rightarrow \text{約数の個数} = (2 + 1) \times (6 + 1) = 21 \text{ 個}$$

のうちのどちらかになる。 n を最小にするには、(i) では $a = 2$ 、(ii) では $b = 3$ 、 $c = 2$ 、すなわち

$$(i) 2^{20} \quad (ii) 3^2 \times 2^6 \text{ のどちらかの場合とわかる。}$$

$$2^{20} > 3^2 \times 2^6 \text{ より、(求める自然数 } n) = 3^2 \times 2^6 = 576 \quad \text{答}$$

解 2

「塾技 96 1」より、正の約数の個数が 4 個となる正の整数を素因数分解したときの形は、

(i) a^3 又は (ii) $b^1 c^1$ の形のどちらかになる。ここで「塾技 96 2」より、

$$(a^3 \text{ の約数の総和}) = 1 + a^1 + a^2 + a^3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

①で、 $a = 2$ のとき① = 15、 $a = 3$ のとき① = 40、 $a = 5$ のとき① = 156 となり、題意を満たさない。

一方、 $b^1 c^1$ の約数の総和は、「塾技 96 2」より、

$$(b^1 c^1 \text{ の約数の総和}) = (1 + b^1)(1 + c^1) = (1 + b)(1 + c) \quad \cdots \textcircled{2}$$

② = 84 となるような $1 + b$ と $1 + c$ の値の組み合わせは、

$$(1 + b, 1 + c) = (1, 84), (2, 42), (3, 28), (4, 21), (6, 14), (7, 12)$$

このうち、 b, c が素数となるのは、 $1 + b = 6$ 、 $1 + c = 14$ すなわち $b = 5$ 、 $c = 13$ のときとなる。

以上より、求める正の整数 n は

$$n = bc = 5 \times 13 = 65 \quad \text{答}$$