難 塾技 98　整数問題（2）

問題 1

次の$\boxed{}$をうめよ。

正多面体は$\boxed{(1)}$種類しか存在しないことが知られている。それを示そう。いま，正多面体の 1 つの頂点の周りに p 個の正 n 角形が集まるとする。正 n 角形の 1 つの内角の大きさは$\boxed{(2)}$°なので，$\boxed{(3)}$°<360°である。この式を変形すると，次のようになる。

$(p-\boxed{(4)})(n-\boxed{(5)})<4$

よって，あてはまる自然数の組 $(p,\ n)$ は$\boxed{(1)}$組あり，実際，これらは$\boxed{(1)}$種類あるそれぞれの正多面体に対応している。特に $p=5$ に対応するものは正$\boxed{(6)}$面体である。　（海城高）

問題 2

次の問いに答えよ。

（1）$mn-2m-4n+8$ を因数分解せよ。

（2）$\dfrac{mn}{m+2n-1}=2$ を満たす整数の組 $(m,\ n)$ は全部で何個あるか。また，積 mn の値が最大となる組は何か。　（慶應義塾志木高）

解 1

（1）正多面体は，正四面体・正六面体・正八面体・正十二面体・正二十面体の **5**(種類)　答

（2）n 角形の内角の和 $=180(n-2)$ より，1 つの内角の大きさは，$\boldsymbol{\dfrac{180(n-2)}{n}}$　答

（3）$\boldsymbol{\dfrac{180(n-2)p}{n}}$　答

（4），（5），（6）

$$\frac{180(n-2)p}{n}<360$$
$$180(n-2)p<360n$$
$$(n-2)p<2n$$
$$(n-2)p-2n<0$$
$$(n-2)p-2n+4<4$$
$$(n-2)p-2(n-2)<4$$
$$(p-2)(n-2)<4 \quad \cdots①$$

n は 3 以上の整数で，①を満たす $(p-2,\ n-2)$ の組は，

$(p-2,\ n-2)=(1,\ 1)(1,\ 2)(2,\ 1)(1,\ 3)(3,\ 1)$

$(p,\ n)=(3,\ 3)(3,\ 4)(4,\ 3)(3,\ 5)(5,\ 3)$

$p=5$ に対応する n は 3 で，1 つの頂点に正三角形が 5 個集まっている立体は正二十面体である。

答　（4）**2**　（5）**2**　（6）二十

解 2

（1）$mn-2m-4n+8$
$=m(n-2)-4(n-2)$　「塾技 36 解法 1」の因数分解
$=\boldsymbol{(m-4)(n-2)}$　答

（2）

$$\frac{mn}{m+2n-1}=2$$
$$mn=2(m+2n-1)$$
$$mn=2m+4n-2$$
$$mn-2m-4n=-2$$

両辺に 8 を加える

$$mn-2m-4n+8=-2+8$$

（1）を利用して左辺を因数分解

$$(m-4)(n-2)=6 \quad \cdots①$$

①を満たす $(m-4,\ n-2)$ の組は，

$(m-4,\ n-2)=(1,\ 6)(2,\ 3)(3,\ 2)(6,\ 1)$
$(-1,-6)(-2,-3)(-3,-2)(-6,-1)$

よって，$(m,\ n)=(5,\ 8)(6,\ 5)(7,\ 4)(10,\ 3)$
$(3,-4)(2,-1)(1,\ 0)(-2,\ 1)$

このうち，$(1,\ 0)$ は分母が 0 となり題意を満たさない。

答　$(m,\ n)$ の組は **7 個**。積の最大の組は $\boldsymbol{(5,\ 8)}$