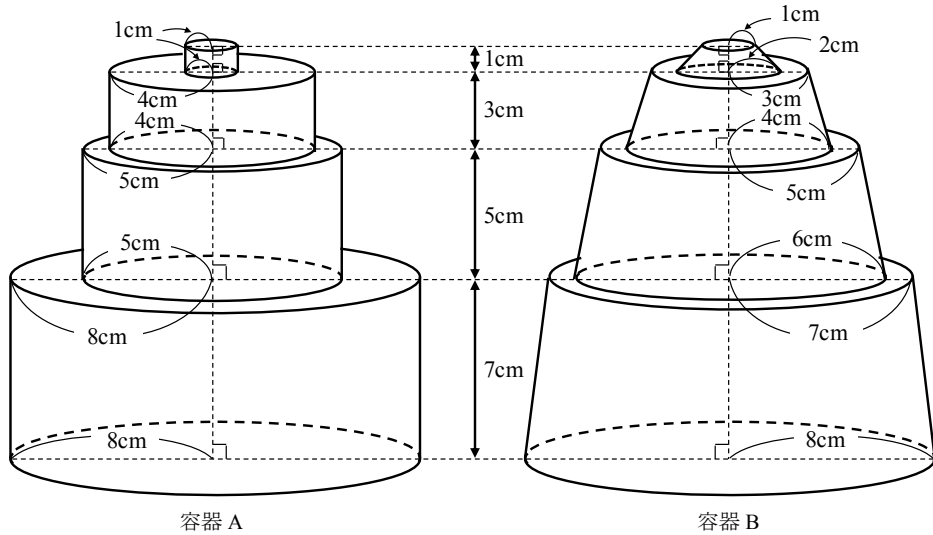


塾技 75 体積比と相似 ~相似~

問題

下の図のような、2つの容器 A, B があります。両方とも、一番上の半径 1cm の円の入り口から毎秒 20cm^3 ずつ水を入れていくと、一番下の半径 8cm の円の底面から水がたまっています。円周率は 3 とします。次の問いに答えなさい。ただし、答えを求めるのに必要な式、考え方などを順序よく書きなさい。



- (1) 容器 B の下の底面からの水の高さが 7cm となったとき、たまった水の体積は何 cm^3 ですか。
- (2) 容器 B の下の底面からの水の高さが 12cm になったとき、容器 A の下の底面からの水の高さは何 cm ですか。
- (3) 容器 A に入れる水の量を途中から最初の 1.2 倍にすると、容器 A, B の水が同時に満杯になりました。容器 A に入れる水の量を変えたとき、容器 A の下の底面からの水の高さは何 cm ですか。

(渋谷教育学園渋谷中)

解答らん

(解答は次ページ)

解

(1) 求める体積は、容器 B の 1 段目の円すい台の体積となるので、

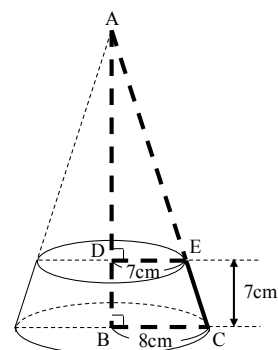
「塾技 75」より、**塾技 48** を用いて求めればよいことがわかる。

図のように各点を取ると、三角形 ADE と三角形 ABC は相似となるので、

$AD : AB = DE : BC = 7 : 8$ となり、 $AD : DB = 7 : (8 - 7) = 7 : 1$ とわかる。

$DB = 7\text{cm}$ より、 $AD = 7 \times 7 = 49(\text{cm})$ 、 $AB = 7 \times 8 = 56(\text{cm})$ 。よって、

$$\begin{aligned} \text{求める体積} &= 8 \times 8 \times 3 \times 56 \times \frac{1}{3} - 7 \times 7 \times 3 \times 49 \times \frac{1}{3} \\ &= 3584 - 2401 = 1183(\text{cm}^3) \end{aligned} \quad \boxed{\text{答}} \quad 1183 \text{ cm}^3$$



(2) まず、(1) と同様にして容器 B の 2 段目の円すい台の体積を求める。

右の図のように各点を取ると、三角形 FHI と三角形 FDG は相似となるので、

$FH : FD = HI : DG = 5 : 6$ となり、 $FH : HD = 5 : (6 - 5) = 5 : 1$ とわかる。

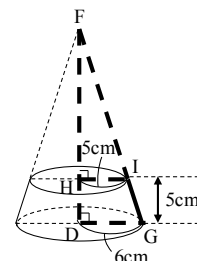
$HD = 5\text{cm}$ より、 $FH = 5 \times 5 = 25(\text{cm})$ 、 $FD = 5 \times 6 = 30(\text{cm})$ 。よって、

$$\text{2段目の円すい台の体積} = 6 \times 6 \times 3 \times 30 \times \frac{1}{3} - 5 \times 5 \times 3 \times 25 \times \frac{1}{3} = 455(\text{cm}^3)$$

よって、水の高さが 12cm となったときの水の体積は、 $1183 + 455 = 1638(\text{cm}^3)$

とわかる。ここで、容器 A の 1 段目の円柱の体積は、 $8 \times 8 \times 3 \times 7 = 1344(\text{cm}^3)$ となるので、容器 A の下から 2 段目に入る水の体積は、 $1638 - 1344 = 294(\text{cm}^3)$ とわかり、容器 A の下から 2 段目に入った水の高さは、 $294 \div (5 \times 5 \times 3) = 3.92(\text{cm})$ とわかる。以上より、求める水の高さは、

$$7 + 3.92 = 10.92(\text{cm}) \quad \boxed{\text{答}} \quad 10.92\text{cm}$$



(3) まず、容器 B の 3 段目と 4 段目の体積を求める。(1)、(2) と

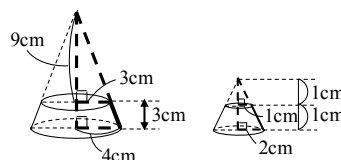
同様 to 求めると、それぞれの長さは右の図のようになるので、

$$\text{3段目の体積} = 4 \times 4 \times 3 \times 12 \times \frac{1}{3} - 3 \times 3 \times 3 \times 9 \times \frac{1}{3} = 111(\text{cm}^3)$$

$$\text{4段目の体積} = 2 \times 2 \times 3 \times 2 \times \frac{1}{3} - 1 \times 1 \times 3 \times 1 \times \frac{1}{3} = 7(\text{cm}^3)$$

よって、容器 B の体積は、 $1183 + 455 + 111 + 7 = 1756(\text{cm}^3)$ とわかるので、水を入れた時間は、 $1756 \div 20 = 87.8(\text{秒})$ とわかる。

一方、容器 A の体積は、 $1344 + 5 \times 5 \times 3 \times 5 + 4 \times 4 \times 3 \times 3 + 1 \times 1 \times 3 \times 1 = 1866(\text{cm}^3)$ で、水は、初め毎秒 20cm^3 ずつ、途中からは毎秒 $20 \times 1.2 = 24(\text{cm}^3)$ ずつ入れたことになる。途中から単位時間あたりに入れる水の量を変えているので、**塾技 19** **3** より、つるかめ算の利用を考えればよい。



	87.8 秒						
実際	20	⋯⋯⋯	20	24	⋯⋯⋯	24	1866 cm^3
全て毎秒 24 cm^3 と仮定	24	⋯⋯⋯	24	24	⋯⋯⋯	24	$24 \times 87.8 = 2107.2(\text{cm}^3)$
1 秒あたりの差	4cm^3	⋯⋯⋯	4cm^3	0cm^3	⋯⋯⋯	0cm^3	全体の差 241.2cm^3

上の図より、容器 A に毎秒 20cm^3 で水を入れた時間は、 $241.2 \div 4 = 60.3(\text{秒})$ とわかる。よって、この間に容器 A に入った水の体積は、 $20 \times 60.3 = 1206(\text{cm}^3)$ と求められ、これは、容器 A の 1 段目の体積より小さいことより、求める水の高さは、

$$1206 \div (8 \times 8 \times 3) = \frac{201}{32} = 6 \frac{9}{32}(\text{cm}) \quad \boxed{\text{答}} \quad 6 \frac{9}{32} \text{ cm}$$